الفصل الثالث
النموذج الثنائي (المقابل) Dual Programming

إن المشاكل التي تم صياغتها بإسلوب البرمجة الخطية تسمى بالنماذج الأولية (Primal Models) ومن الممكن إعادة صياغة هذه النماذج بإستخدام مايسمى بالنماذج الثنائية (Dual Models). ومن أهم فوائد عملية التحويل هو تقليص الجهد الحسابي المطلوب في تحليل مسائل البرمجة الخطية التي تحتوي على عدد كبير من القيود وما دام الحل الأمثل لدالة الهدف في البرنامج الأصلي والبرنامج الثنائي متطابقان دائما فأن أمامنا خيار للأخذ بالأسهل حلا .

والخطوات التالية تبين لنا كيفية تحويل النماذج الأولية الى نماذج ثنائية:

1- تحول جميع القيود الى متباينات من نوع واحد وكما يلي:
a- اذا كانت دالة الهدف من Max فالمتباينات تكون من نوع (أقل أو يساوي)
b- اذا كانت دالة الهدف من Min فالمتباينات تكون من نوع (أكبر أو يساوي)
2- تحول دالة الهدف من Max الى Min وبالعكس.
3- عدد المتغيرات في النموذج الأولي يساوي عدد القيود في النموذج الثنائي العكس صحيح.
وهذا يعني إذا احتوى البرنامج على n من المتغيرات و m من القيود فان النموذج الثنائي سوف يحتوي على m من المتغيرات و n من القيود.
4- تحول القيود من متباينات من نوع (أكبر أو يساوي) الى متباينات من نوع (أقل أو يساوي) والعكس صحيح.
5- معاملات دالة الهدف تصبح قيم الثوابت في القيود والعكس صحيح.
6- معاملات المتغيرات في الصف (i) تصبح معاملات للمتغيرات في العمود (i).
7- يتم إستخدام الرمز Q بدل Z و y بدل x.

والمثال أدناه يوضح كيفية تحويل نموذج أولي الى نموذج ثنائي (مقابل) :

نموذج مقابل **Dual Model**	نموذج أولي **Primal Model**
$MaxQ = 7y_1 + 11y_2 + 16y_3$ $S.to$ $2y_1 + y_2 + 5y_3 \le 1$ $y_1 + 3y_2 + 2y_3 \le 3$ $y_1, y_2, y_3 \ge 0$	$MinZ = x_1 + 3x_2$ $S.to$ $2x_1 + x_2 \ge 7$ $x_1 + 3x_2 + \ge 11$ $5x_1 + 2x_2 \ge 16$ $x_1, x_2, \ge 0$

ويلاحظ ما يأتي :

1. إن البرنامج الأصلي يحتوي على ثلاث قيود في حين احتوى البرنامج الثنائي على قيدين .
2. يحتوي البرنامج الأصلي على متغيرين بينما يحتوي الثنائي على ثلاث متغيرات .
3. بقيت قيود عدم السالبية على إشاراتها .
4. أصبحت الثوابت في القيود في البرنامج الأصلي وهي (16، 11 ،7) معاملات لدالة الهدف.
5. أصبحت معاملات دالة الهدف في البرنامج الأصلي وهي (1،3) ثوابت في قيود البرنامج الثنائي .

<u>مثال (1)</u>

جد البرنامج المقابل للدالة أدناه :

$$
\begin{aligned}
&MaxZ = 3x_1 + 6x_2 \\
&S.to \\
&4x_1 + 5x_2 \le 70 \\
&10x_1 + 6x_2 \le 60 \\
&x_2 \ge 10 \\
&x_1, x_2 \ge 0
\end{aligned}
$$

الحل:

يتم تغيير إشارة القيد الثالث باعتبار أن الدالة هي دالة تعظيم أي جعل إشارة كل القيود من نوع واحد وهي (أصغر من ≤) حيث نقوم بعكس إشارة القيد الثالث بضرب القيد الثالث بـ (-1) فيصبح القيد كما يلي : $-X_2 \leq -10$ ويصبح النموذج الأولي كما يلي :

$$
\begin{aligned}
&MaxZ = 3X_1 + 6X_2 \\
&S.to \\
&4x_1 + 5x_2 \leq 70 \\
&10x_1 + 6x_2 \leq 60 \\
&-x_2 \leq -10 \\
&x_1, x_2 \geq 0
\end{aligned}
$$

ثم نقوم بتحويل النموذج الأولي الى النموذج المقابل:

$$
\begin{aligned}
&MinQ = 70y_1 + 60y_2 - 10y_3 \\
&S.to: \\
&4y_1 + 10y_2 \geq 3 \\
&5y_1 + 6y_2 - y_3 \geq 6 \\
&y_1 y_2, y_3 \geq 0
\end{aligned}
$$

مثال (2)

اكتب النموذج المقابل لنموذج البرمجة الخطية الأولي التالي:

$$
\begin{aligned}
&MinZ = x_1 + x_2 - x_3 - x_4 \\
&S.to: \\
&3x_1 - 2x_2 + x_3 + 5x_4 \leq 18 \\
&5x_1 + 6x_3 \leq 20 \\
&-x_1 + x_2 + 4x_3 + x_4 \geq 9 \\
&x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0
\end{aligned}
$$

نلاحظ أن إشارة القيود في النموذج الأولي مختلفة ، لذلك يجب أن نجعل إشارة كل القيود من نوع واحد وهي (أصغر من≤) وذلك لأن دالة الهدف دالة تقليل لذلك نحتاج تغيير إشارة القيد الاول والثاني وذلك بضرب القيود بـ (-1) فيصبح:

وعليه فأن النموذج الأولي سيكون:

$$
\begin{aligned}
&MinZ = x_1 + x_2 - x_3 - x_4 \\
&S.to: \\
&-3x_1 + 2x_2 - x_3 - 5x_4 \geq -18 \\
&-5x_1 - 6x_3 \geq -20 \\
&-x_1 + x_2 + 4x_3 + x_4 \geq 9 \\
&x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0
\end{aligned}
$$

ويكون النموذج المقابل كما يلي :

$$
\begin{aligned}
&MaxQ = -18y_1 - 20y_2 + 9y_3 \\
&S.to: \\
&-3y_1 - 5y_2 - y_3 \leq 1 \\
&2y_1 + y_3 \leq 1 \\
&-y_1 - 6y_2 + 4y_3 \leq -1 \\
&-5y_1 + y_3 \leq -1 \\
&y_1, y_2, y_3 \geq 0
\end{aligned}
$$