مثال (2):

إستخدم طريقة السمبلكس لإيجاد الحل لنموذج البرمجة الخطية التالي:

$$MaxZ = 9X_1 + 7X_2$$

S.to:

$$10X_1 + 5X_2 \le 50$$
$$6X_1 + 6X_2 \le 36$$
$$4.5X_1 + 18X_2 \le 81$$
$$X_1, X_2 \ge 0$$

الحل :

1- نحول الى الشكل القياسي:

$$10X_1 + 5X_2 + S_1 = 50$$
$$6X_1 + 6X_2 + S_2 = 36$$
$$4.5X_1 + 18X_2 + S_3 = 81$$

2 – نضيف المتغيرات الوهمية الى دالة الهدف بمعامل صفري:

$$MaxZ = 9X_1 + 7X_2 + 0S_1 + 0S_2 + 0S_3$$

3 – نحول قيم دالة الهدف الى طرف واحد وفق الصيغة التالية:

$$MaxZ - 9X_1 - 7X_2 - 0S_1 - 0S_2 - 0S_3 = 0$$

4 – ترتب دالة الهدف والقيود في جدول Simplex وكما موضح في الجدول أدناه:

B.V	X_1	X_2	S_1	S_2	S_3	Sol.
Z	-9	-7	0	0	0	0
S_1	10	5	1	0	0	50
S_2	6	6	0	1	0	36
S_3	4.5	18	0	0	1	81

نقوم الان بتطوير الحل وكما يلي:

تحديد المتغير الداخل والخارج

المتغير الداخل هو المتغير صاحب القيمة الأكثر سالبية في صف الـ (z).

وبذلك يكون X_1 هو المتغير الداخل (صاحب القيمة الأكثر سالبية (9-) في صف z).
ويسمى عمود X_1 في الجدول بـ **(العمود المحوري)**.

أما **المتغير الخارج** فهو صاحب القيمة الأصغر الناتجة من قسمة عناصر العمود (Sol.) على العناصر المناظرة له في العمود المحوري للقيود عدا صف دالة الهدف وكما يلي:

في صف S_1 فأن $5 = \frac{50}{10}$

في صف S_2 فأن $6 = \frac{36}{6}$

في صف S_3 فأن $18 = \frac{81}{4.5}$

ويلاحظ أن اقل نسبة بين النسب هي 5 لذلك فأن S_1 سيكون هو المتغير الخارج.

ويسمى عنصر التقاطع بين عمود المتغير الداخل وصف المتغير الخارج بـ (العنصر المحوري). ونلاحظ هنا أن العنصر 10 في صف S_1 هو العنصر المحوري (كونه واقع في نقطة تقاطع عمود المتغير الداخل وصف المتغير الخارج).

وتبعا لذلك يتم تغيير قيم جدول السمبلكس وكما يلي:

إيجاد معادلة المحور

معادلة المحور تمثل الصف الجديد الذي يحل محل صف المتغير الخارج (هنا: صف S_1 أو الصف الثاني) ويتم إيجاده من خلال قسمة جميع عناصر الصف الخارج على العنصر المحوري (10) وكما يلي:

$$\left[\frac{10}{10}\frac{5}{10}\frac{1}{10}\frac{0}{10}\frac{0}{10}\frac{50}{10}\right] \rightarrow X_1 = (1, \frac{1}{2}, \frac{1}{10}, 0, 0, 5)$$

أي :

B.V	X_1	X_2	S_1	S_2	S_3	Sol.
X_1	1	1/2	1/10	0	0	5

ويلاحظ أن الصف الناتج أعلاه (للمتغير الداخل X_1) سوف يحل محل صف المتغير الخارج S_1 .

<u>إيجاد بقية الصفوف</u>

يتم إيجاد بقية الصفوف بإستخدام الصيغة:

معادلة الصف الجديد = معادلة الصف القديم – (عنصر التقاطع) * (معادلة المحور)

حيث أن عنصر التقاطع يمثل عنصر تقاطع عمود المتغير الداخل مع الصف المعني.

فلإيجاد القيم الجديدة لصف z نقوم بالاتي:

الصف القديم (0 0 0 0 -7 -9)

معادلة المحور (5 0 0 $\frac{1}{10}$ $\frac{1}{2}$ 1) (-9) عنصر التقاطع

بالطرح

Z (0 −5/2 9/10 0 0 45)

أي :

B.V	X_1	X_2	S_1	S_2	S_3	Sol.
Z	0	−5/2	9/10	0	0	45

ونفس الإجراء بالنسبة للصف S_2 وكالآتي:

(6 6 0 1 0 36)

(6) (1 $\frac{1}{2}$ $\frac{1}{10}$ 0 0 5)

بالطرح

S_2 (0 3 $\frac{-6}{10}$ 1 0 6)

أي :

B.V	X_1	X_2	S_1	S_2	S_3	Sol.
S_2	0	3	$-6/10$	1	0	6

ونفس الإجراء بالنسبة للصف S_3 :

$$(4.5 \quad 18 \quad 0 \quad 0 \quad 1 \quad 81)$$
$$(4.5)(1 \quad \frac{1}{2} \quad \frac{1}{10} \quad 0 \quad 0 \quad 5)$$

بالطرح

$$S_3 \ (0 \quad 15.75 \quad -0.45 \quad 0 \quad 1 \quad 58.5)$$

أي :

B.V	X_1	X_2	S_1	S_2	S_3	Sol.
S_3	0	15.75	-0.45	1	0	58.5

وبذلك يكون الجدول بالشكل التالي:

B.V	X_1	X_2	S_1	S_2	S_3	Sol.
Z	0	$-5/2$	9/10	0	0	45
X_1	1	1/2	1/10	0	0	5
S_2	0	3	$-6/10$	1	0	6
S_3	0	15.75	-0.45	0	1	58.5

ولما كانت قيم دالة الهدف ما زال فيها قيم سالبة فأننا لم نصل للحل المثل وبذلك نستمر بالحل وبنفس الطريقة أعلاه حتى نصل **للحل الأمثل بحيث تكون قيم** $Z \geq 0$.

تحديد المتغير الداخل والخارج

أن أكبر قيمة سالبة هي $(-5/2)$ التي تمثل معامل X_2 لذلك فأن X_2 سيكون المتغير الداخل ويسمى عمود X_1 في الجدول بالعمود المحوري.

أمـــا المتغيـــر الخـــارج فقـــد تـــم اســـتخراجه مـــن خـــلال تقســـيم قـــيم العمـــود الاخيـــر فـــي الجـــدول (Sol) علـــى العناصـــر المنـــاظرة لـــه فـــي العمـــود المحـــوري للقيـــود عـــدا صـــف دالة الهدف وكما يلي:

في صف X_1 فأن $\frac{5}{\frac{1}{2}} = 10$

في صف S_2 فأن $\frac{6}{3} = 2$

في صف S_3 فأن $\frac{58.5}{15.75} = 3.7$

ويلاحـــظ أن اقـــل نســـبة بـــين النســـب هـــي 2 لـــذلك نطلـــق علـــى العنصـــر (3) فـــي صف S_2 العنصر المحوري وبذلك فأن S_2 سيكون هو المتغير الخارج .

أي أن X_2 هو المتغير الداخل و S_2 هو المتغير الخارج.

إيجاد معادلة المحور

بعد تقسيم عناصر الصف الخارج (S_2) على العنصر المحوري (3) نحصل على:

$$\left[\frac{0}{3}\ \frac{3}{3}\ \frac{-6/10}{3}\ \frac{1}{3}\ \frac{0}{3}\ \frac{6}{3}\right] \quad \rightarrow X_2\ (\ 0\quad 1\quad -2/10\quad 1/3\quad 0\quad 2)$$

أي :

B.V	X_1	X_2	S_1	S_2	S_3	Sol.
X_2	0	1	$-2/10$	1/3	0	2

إيجاد بقية الصفوف

بإستخدام نفس المعادلة أعلاه نحصل على:

بالنسبة للصف الأول (z)

يـــتم ضـــرب معادلـــة المحـــور بالعنصـــر المحـــوري المقابـــل لـــ Z وهـــو $(-5/2)$

وطرحها من مصفوفة Z الأصلية وكالآتي:

$$(\ 0\quad -5/2\quad 9/10\quad 0\quad 0\quad 45\ )$$
$$(-5/2)\ (0\quad 1\quad -2/10\quad 1/3\quad 0\quad 2)$$

بالطرح ــ

Z (0 0 4/10 5/6 0 50)

أي :

B.V	X_1	X_2	S_1	S_2	S_3	Sol.
Z	0	0	4/10	5/6	0	50

بالنسبة للصف الأول (X_1)

فيتم ضرب معادلة المحور بالعنصر المحوري المقابل لـ X_1 وهو (1/2) وطرحها من مصفوفة X_1 الأصلية وكالآتي:

$$(1 \quad \frac{1}{2} \quad \frac{1}{10} \quad 0 \quad 0 \quad 5)$$

$$(1/2)\,(0 \quad 1 \quad -2/10 \quad 1/3 \quad 0 \quad 2)$$

بالطرح ــ

X_1(1 0 2/10 −1/6 0 4)

أي :

B.V	X_1	X_2	S_1	S_2	S_3	Sol.
X_1	1	0	2/10	−1/6	0	4

بالنسبة للصف الرابع (S_3)

فيتم ضرب معادلة المحور بالعنصر المحوري المقابل لـ S_3 وهو (15.75) وطرحها من مصفوفة S_3 الأصلية وكالآتي :

$$(0 \quad 15.75 \quad -0.45 \quad 0 \quad 1 \quad 58.5)$$

$$(15.75)\,(0 \quad 1 \quad -2/10 \quad 1/3 \quad 0 \quad 2)$$

بالطرح ــ

S_3(0 0 2.7 -5.25 1 27)

أي :

B.V	X_1	X_2	S_1	S_2	S_3	Sol.
S_3	0	0	2.7	-5.25	1	27

وبذلك يكون لدينا:

B.V	X_1	X_2	S_1	S_2	S_3	Sol.
Z	0	0	4/10	5/6	0	50
X_1	1	0	2/10	$-1/6$	0	4
X_2	0	1	$-2/10$	1/3	0	2
S_3	0	0	2.7	-5.25	1	27

ونتيجة للتوصل الى الحالة التي ليس فيها قيم سالبة في دالة Z فأن الحل الأمثل هو :

$Z = 50 \qquad X_1 = 2 \qquad X_1 = 4$

والآن سنقوم بتجميع أجزاء الحل في جدول واحد لحاجتنا الى ذلك في تثبيت بعض الملاحظات:

B.V	Z	X_1	X_2	S_1	S_2	S_3	Sol.
Z	1	-9	-7	0	0	0	0
S_1	0	10	5	1	0	0	50
S_2	0	6	6	0	1	0	36
S_3	0	4.5	18	0	0	1	81
Z	1	0	$-5/2$	9/10	0	0	45
X_1	0	1	1/2	1/10	0	0	5
S_2	0	0	3	$-6/10$	1	0	6
S_3	0	0	15.75	-0.45	0	1	58.5
Z	1	0	0	4/10	5/6	0	50
X_1	0	1	0	2/10	$-1/6$	0	4
X_2	0	0	1	$-2/10$	1/3	0	2
S_3	0	0	0	2.7	-5.25	1	27

ونتيجة للتوصل الى الحالة التي ليس فيها قيم سالبة في دالة Z فأن الحل الأمثل هو :

$X_1 = 4, X_2 = 2 \& z = 50$

مثال (3)

إستخدم طريقة السمبلكس لإيجاد الحل لنموذج البرمجة الخطية التالي:

$$MaxZ = 3X_1 + 5X_2 + 3X_3$$

S.to

$$2X_1 + 3X_2 + 6X_3 \le 50$$
$$3X_1 + 4X_1 + X_3 \le 40$$
$$3X_1 + 5X_2 + 2X_3 \le 20$$

$$X_1 \ge 0, X_2 \ge 0, X_2 \ge 0$$

الحل

التحويل الى الشكل القياسي:

$$2X_1 + 3X_2 + 6X_3 + S_1 = 50$$
$$3X_1 + 4X_1 + X_3 + S_2 = 40$$
$$3X_1 + 5X_2 + 2X_3 + S_3 = 20$$

تصفير دالة الهدف مع إضافة المتغيرات الوهمية:

$$MaxZ - 3X_1 - 5X_2 - 3X_3 - 0S_1 - 0S_2 - 0S_3 = 0$$

تكوين جدول السمبلكس:

B.V	X_1	X_2	X_3	S_1	S_2	S_3	Sol
Z	-3	-5	-3	0	0	0	0
S_1	2	3	6	1	0	0	50
S_2	3	4	1	0	1	0	40
S_3	3	5	2	0	0	1	20

تحديد المتغيرات الداخلة والخارجة:

X_2 هو المتغير الداخل (لان معامله 5-) .

أما بالنسبة للمتغير الخارج فإن:

في صف S_1 فأن $\frac{50}{3} = 16.66$

في صف S_2 فأن $10 = \frac{40}{40}$

في صف S_3 فأن $4 = \frac{20}{5}$

إذن S_3 هو المتغير الخارج لان يقابل أقل ناتج قسمة (4)

إيجاد معادلة المحور

قسمة عناصر الصف الخارج على العنصر المحوري (5):

$$\frac{3}{5}\ \frac{5}{5}\ \frac{2}{5}\ \frac{0}{5}\ \frac{0}{5}\ \frac{1}{5}\ \frac{20}{5} \rightarrow \quad X_2 \quad (\ 3/5\ \ 1\ \ 2/5\ \ 0\ \ 0\ \ 1/5\ \ 4\ )$$

إيجاد بقية الصفوف

الصف الأول (Z)

$$\begin{array}{rl} & (\ -3\ \ -5\ \ -3\ \ 0\ \ 0\ \ 0\ \ 0\ ) \\ (-5)\ & (\ 3/5\ \ 1\ \ 2/5\ \ 0\ \ 0\ \ 1/5\ \ 4\ ) \\ \text{بالطرح} & \text{———————————} \\ & Z\ (\ 0\ \ 0\ \ -1\ \ 0\ \ 0\ \ 1\ \ 20\ ) \end{array}$$

الصف الثاني (S_1)

$$\begin{array}{rl} & (\ 2\ \ 3\ \ 6\ \ 1\ \ 0\ \ 0\ \ 50\ ) \\ (3)\ & (\ 3/5\ \ 1\ \ 2/5\ \ 0\ \ 0\ \ 1/5\ \ 4\ ) \\ \text{بالطرح} & \text{———————————} \\ & S_1\ (\ 1/5\ \ 0\ \ 24/5\ \ 1\ \ 0\ \ -3/5\ \ 38\ ) \end{array}$$

الصف الثالث (S_2)

$$\begin{array}{rl} & (\ 3\ \ 4\ \ 1\ \ 0\ \ 1\ \ 0\ \ 40\ ) \\ (4)\ & (\ 3/5\ \ 1\ \ 2/5\ \ 0\ \ 0\ \ 1/5\ \ 4\ ) \\ \text{بالطرح} & \text{———————————} \\ & S_2\ (\ 3/5\ \ 0\ \ -3/5\ \ 0\ \ 1\ \ -4/5\ \ 24\ ) \end{array}$$

وبذلك يكون الجدول الثاني كما يلي :

B.V	X_1	X_2	X_3	S_1	S_2	S_3	Sol
Z	0	0	-1	0	0	1	20
S_1	1/5	0	24/5	1	0	$-3/5$	38
S_2	3/5	0	-3/5	0	1	$-4/5$	24
X_2	3/5	1	2/5	0	0	1/5	4

نستمر بالحل بإتباع نفس الاسلوب لوجود قيمة سالبة في صف z، وبذلك نحصل على:

تحديد المتغيرات الداخلة والخارجة:

X_3 هو المتغير الداخل (لان معامله 1-) .

أما بالنسبة للمتغير الخارج فإن:

في صف S_1 فأن $\frac{38}{24/5} = 7.9$

في صف S_2 فأن $\frac{24}{3/5} = 8$ (بغض النظر عن الاشارة)

في صف X_2 فأن $\frac{4}{2/5} = 10$

إذن S_1 هو المتغير الخارج لان يقابل أقل ناتج قسمة (7.9)

إيجاد معادلة المحور

قسمة عناصر الصف الخارج على العنصر المحوري (24/5):

$$\frac{1/5}{24/5} \quad \frac{0}{24/5} \quad \frac{24/5}{24/5} \quad \frac{1}{24/5} \quad \frac{0}{24/5} \quad \frac{-3/5}{24/5} \quad \frac{38}{24/5} \Rightarrow$$

X_3 (1/24 0 1 5/24 0 -1/8 95/12)

إيجاد بقية الصفوف

الصف الأول (z)

(0 0 -1 0 0 1 20)
(-1) (1/24 0 1 5/24 0 -1/8 95/12)
بالطرح
Z (1/24 0 0 5/24 0 7/8 335/12)

الصف الثاني (S_2)

(3/5 0 -3/5 0 1 -4/5 24)
(-3/5) (1/24 0 1 5/24 0 -1/8 95/12)
بالطرح
S_1 (5/8 0 0 1/8 1 -7/8 115/4)

الصف الثالث (X_2)

(3/5 1 2/5 0 0 1/5 4)
(2/5) (1/24 0 1 5/24 0 -1/8 95/12)
بالطرح
S_2 (7/12 1 0 -1/12 0 1/4 5/6)

B.V	X_1	X_2	X_3	S_1	S_2	S_3	Sol
Z	1/24	0	0	5/24	0	7/8	335/12
X_3	1/24	0	1	5/24	0	$-1/8$	95/12
S_2	5/8	0	0	1/8	1	$-7/8$	115/4
X_2	7/12	1	0	$-1/12$	0	1/4	5/6

والحل الأمثل هنا هو $X_1 = 0$ $X_2 = 5/6$ $X_3 = 95/12$ $Z = 335/12$