الطريقة المبسطة Simplex method (طريقة السمبلكس)

نظراً لان طريقة الحل بالرسم البياني لا تصلح لأكثر من متغيرين استلزم الأمر وجود طرائق أخرى للتعامل مع مثل هذه المشكلات، ومن بين هذه الطرائق والتي تصلح للتعامل مع مشكلات البرمجة الخطية طريقة السمبلكس التي ابتكرها دانكز عام 1947 ، وبالإضافة لصلاحية هذه الطريقة للتعامل مع المشكلات ذات المتغيرات كثيرة العدد فأنه يوجد الكثير من برامج الحاسوب الآلي التي تعمل وفق هذه الطريقة.

وتعمل هذه الطريقة بالإعتماد عى حل مقبول ومن ثم تستمر بإسلوب تكراري دوري في تطوير هذا الحل إلى أن نحصل بعد عدد محدد من الخطوات على الحل الأمثل.

وفيما يلي الخطوات الرئيسية لهذه الطريقة :

1. تحويل المسألة إلى الشكل القياسي.
2. تصفير دالة الهدف مع إضافة المتغيرات الوهمية (التي يتم إضافتها لتحقيق شروط الشكل القياسي في الخطوة الاولى أعلاه) بمعامل صفري.
3. عمل جدول الـ (Simplex).
4. تطوير الحل من خلال إدخال متغير ليحل محل متغير اخر (يسمى الأول بالمتغير الداخل والثاني بالمتغير الخارج).
5. تكرار الخطوة الرابعة أعلاه لحين الحصول على الحل الأمثل.

من الجدير بالذكر أنه سوف يتم التطرق فقط لنماذج البرمجة الخطية التي تكون دال الهدف فيها من نوع Max وقيودها من نوع (أصغر أو يساوي)، والمثال أدناه يوضح طريقة الحل بالتفصيل:

مثال (1) :

اوجد الحل الأمثل لمشكلة البرمجة الخطية الآتية باستخدام الطريقة المبسطة :

$$MaxZ = 8X_1 + 12X_2$$

$$S.to :$$

$$X_1 + X_2 \le 10$$

$$3X_1 + 2X_2 \le 30$$

$$X_1, X_2 \ge 0$$

الحل :

1- نحول الى الشكل القياسي:

$$X_1 + X_2 + S_1 = 10$$
$$3X_1 + 2X_2 + S_2 = 30$$

2 – نضيف المتغيرات الوهمية الى دالة الهدف بمعامل صفري:

$$MaxZ = 8X_1 + 12X_2 + 0S_1 + 0S_2$$

3 – نحول قيم دالة الهدف الى طرف واحد وفق الصيغة التالية:

$$MaxZ - 8X_1 - 12X_2 - 0S_1 - 0S_2 = 0$$

4 – ترتب دالة الهدف والقيود في جدول Simplex وكما موضح في الجدول أدناه:

B.V	X_1	X_2	S_1	S_2	Sol.
Z	-8	-12	0	0	0
S_1	1	1	1	0	10
S_2	3	2	0	1	30

نقوم الان بتطوير الحل وكما يلي:

تحديد المتغير الداخل والخارج

المتغير الداخل هو المتغير صاحب القيمة الأكثر سالبية في صف الـ (z).

وبذلك يكون X_2 هو المتغير الداخل (صاحب القيمة الأكثر سالبية (12-) في صف z).
ويسمى عمود X_2 في الجدول بـ **(العمود المحوري)**.

أما **المتغير الخارج** فهو صاحب القيمة الأصغر الناتجة من قسمة عناصر العمود (Sol.) على العناصر المناظرة له في العمود المحوري للقيود عدا صف دالة الهدف وكما يلي:

في صف S_1 فأن $10 = \frac{10}{1}$

في صف S_2 فأن $15 = \frac{30}{2}$

ويلاحظ أن اقل نسبة بين النسب هي 10 لذلك فأن S_1 سيكون هو المتغير الخارج.

ويسمى عنصر التقاطع بين عمود المتغير الداخل وصف المتغير الخارج بـ (العنصر المحوري). ونلاحظ هنا أن العنصر 1 في صف S_1 هو العنصر المحوري (كونه واقع في نقطة تقاطع عمود المتغير الداخل وصف المتغير الخارج).

وتبعا لذلك يتم تغيير قيم جدول السمبلكس وكما يلي:

إيجاد معادلة المحور

معادلة المحور تمثل الصف الجديد الذي يحل محل صف المتغير الخارج (هنا: صف S_1 أو الصف الثاني) ويتم إيجاده من خلال قسمة جميع عناصر الصف الخارج على العنصر المحوري (1) وكما يلي:

$$\left[\frac{1}{1}\ \frac{1}{1}\ \frac{1}{1}\ \frac{0}{1}\ \frac{10}{1}\right] \Rightarrow X_2 = (1,1,1,0,10)$$

أي :

B.V	X_1	X_2	S_1	S_2	Sol.
X_2	1	1	1	0	10

ويلاحظ أن الصف الناتج أعلاه (للمتغير الداخل X_2) سوف يحل محل صف المتغير الخارج S_1 .

إيجاد بقية الصفوف

يتم إيجاد بقية الصفوف بإستخدام الصيغة:

معادلة الصف الجديد = معادلة الصف القديم – (عنصر التقاطع) * (معادلة المحور)

حيث أن عنصر التقاطع يمثل عنصر تقاطع عمود المتغير الداخل مع الصف المعني.

فلإيجاد القيم الجديدة لصف z نقوم بالاتي:

الصف القديم (0 0 0 -12 -8)

معادلة المحور (10 0 1 1 1) (-12) عنصر التقاطع

بالطرح

z (4 0 12 0 120)

أي

B.V	X_1	X_2	S_1	S_2	Sol.
Z	4	0	12	0	120

ونفس الإجراء بالنسبة للصف S_2 وكالآتي:

$$\begin{array}{rr} & (3 \quad 2 \quad 0 \quad 1 \quad 30) \\ (2)\ & (1 \quad 1 \quad 1 \quad 0 \quad 10) \\ \text{بالطرح} & \text{———————————} \\ S_2 & (1 \quad 0 \quad -2 \quad 1 \quad 10) \end{array}$$

أي:

B.V	X_1	X_2	S_1	S_2	Sol.
S_2	1	0	-2	1	10

وبذلك يكون الجدول الثاني كما يلي :

B.V	X_1	X_2	S_1	S_2	R.H.S
Z	4	0	12	0	120
X_1	1	1	1	0	10
S_2	1	1	1	0	0

ولما كانت قيم دالة الهدف (صف Z) جميعها موجبة فهذا يعني اننا وصلنا الى الحل. ويجب ملاحظة أنه في حالة وجود قيم سالبة في صف Z فان ذلك يعني أننا لم نصل للحل المثل وبذلك نستمر بالحل وبنفس الطريقة أعلاه حتى نصل **للحل الأمثل بحيث تكون جميع قيم صف Z موجبة.**