مثال (2) :
أستخدم الطريقة البيانية لإيجاد الحل الأمثل لنموذج البرمجة الخطية أدناه:

$$
\begin{aligned}
&Mini Z = 40X_1 + 3X_2 \\
&S.t: \\
&2X_1 + 3X_2 \geq 12 \\
&X_1 + X_2 \geq 25 \\
&5X_2 + 3X_2 \geq 90 \\
&X_1 , X_2 \geq 0
\end{aligned}
$$

1- لرسم القيود الثلاث يتم تحويل القيود الى معادلات وكالآتي :

$2X_1 + 3X_2 = 12$ ....(1)

$X_1 + X_2 = 25$ ....(2)

$5X_1 + 3X_2 = 90$ …………….. (3)

2 – يتم تحديد نقاط التقاطع للمعادلات أعلاه ومن خلال رسم المستقيمات للوصول للحل الأمثل وكما يلي :

- معادلة القيد الأول :

$$2X_1 + 3X_2 = 12$$

عندما $X_2 = 0$ فأن $X_1 = 6$
وبذلك نحصل على نقطة نطلق عليها a وتكون إحداثياتها (6,0) .

عندما $X_1 = 0$ فأن $X_2 = 4$
فنحصل على نقطة نطلق عليها $\bar{a}$ وتكون إحداثياتها (0,4)

وبذلك يتم رسم القيد بصورة المستقيم والذي يحدد بالنقاط (0,4) و (6,0)

- معادلة القيد الثاني :

$$X_1 + X_2 = 25$$

عندما $X_2 = 0$ فأن $X_1 = 25$
وبذلك نحصل على نقطة نطلق علها b وتكون إحداثياتها (25,0)

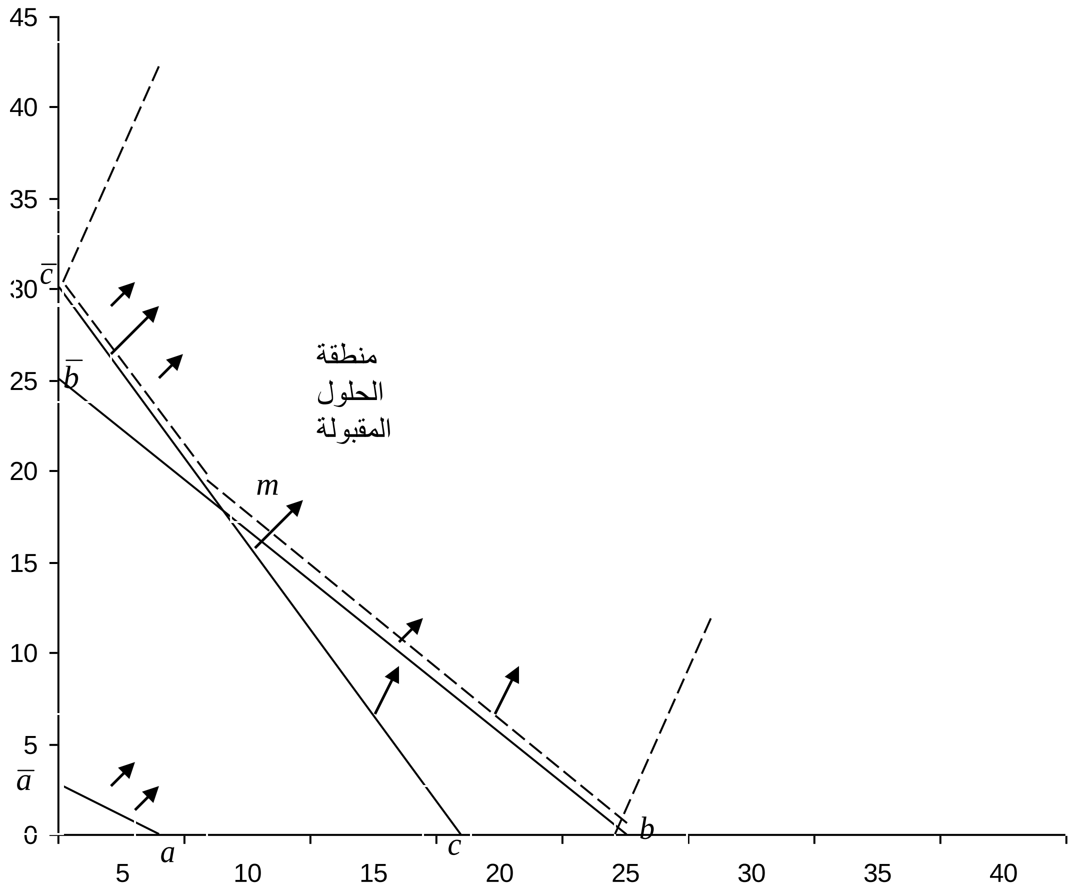
عندما $X_1 = 0$ فأن $X_2 = 25$
وبذلك نحصل على نقطة نطلق عليها $\bar{b}$ تكون إحداثياتها (0,25) .

- معادلة القيد الثالث :

$$5X_1 + 3X_2 = 90$$

عندما $X_2 = 0$ فأن $X_1 = 18$
وبذلك نحصل على نقطة نطلق علها c وتكون إحداثياتها (18,0)

وعندما $X_1 = 0$ فأن $X_2 = 30$
وبذلك نحصل على نقطة نطلق عليها $\bar{c}$ تكون إحداثياتها (0,30) .



إن منطقة الحلول المقبولة هي المنطقة المقعرة بالنقاط $\bar{c}mb$.
نلاحظ أنه لم يتم أخذ القيد $a\bar{a}$ بعين الاعتبار حيث أن هذا القيد لا تأثير له على منطقة الحلول المقبولة.

والآن يتم تحديد نقطة تقاطع المستقيمين اللائي تم رسمهما وذلك لتحديد منطقة الحلول الممكنة وحسب ما هو مطلوب من القيود وهي المنطقة التي تحقق جميع القيود في آن واحد باستثناء القيد الأول وكما مبين بالشكل أعلاه وبما أن جميع النقاط معلومة ما عدا النقطة m فيتم استخراجها من إحداثيات نقطة التقاطع c (الناتجة من تقاطع القيدين الثاني والثالث) إذ نقوم بحل المعادلتين (2) و(3) آنيا وذلك بضرب المعادلة (2) بـ 5 ونطرح منها المعادلة (3) وكما يلي :

$$5X_1 + 5X_2 = 125 \qquad ....(2)$$

$-5X_1 - 3X_2 = -90$ ....(3)

$2X_2 = 35$

$X_2 = 17.5$

وبتعويض قيمة X_2 في احدى المعادلتين أعلاه نحصل على: $X_1 = 7.5$

النقطة	X_1	X_2	$MiniZ = 40X_1 + 3X_2$
b	25	0	1000
m	7.5	17.5	352.5
$\bar{c}$	0	30	90

يتضح من النتائج أعلاه أن نقطة $\bar{c}$ تمثل الحل الأمثل للمشكلة حيث يتم إنتاج 30 وحدات من المناضد ويتوقف عن إنتاج الكراسي نهائيا ليحصل المصنع على اقل كلفة ممكنة .

<u>مثال (3) :</u>

أوجد قيم X_1, X_2 المثلى التي تجعل دالة الهدف أكبر ما يمكن أو بصيغة أخرى أوجد الحل الأمثل لنموذج البرمجة الخطية التالي باستخدام الطريقة البيانية:

$$MaximizeZ = 9X_1 + 7X_2$$
$$S.t:$$
$$10X_1 + 5X_2 \le 50$$
$$6X_1 + 6X_2 \le 36$$
$$4.5X_1 + 18X_2 \le 81$$
$$X_1, X_2 \ge 0$$

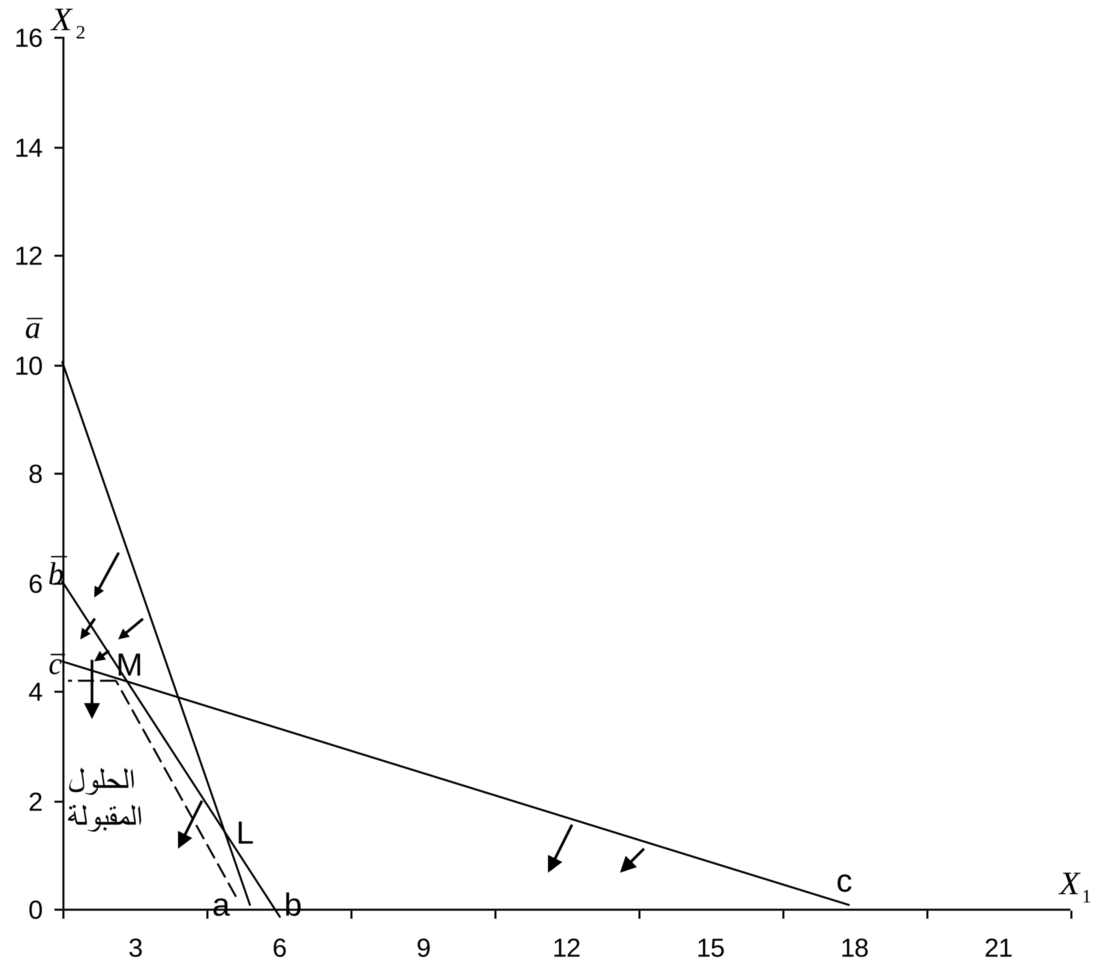
<u>الحل :</u>

1 – تحول المتباينات الى معادلات :

$$10X_1 + 5X_2 = 50 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$
$$6X_1 + 6X_2 = 36 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$
$$4.5X_1 + 18X_2 = 81 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (3)$$

2 - نرسم المستقيمات بعد تحديد إحداثيات النقاط وبنفس الطرق المتبعة في الأمثلة السابقة وهذه الإحداثيات ستكون كما يلي :

النقطة	إحداثياتها
a $\bar{a}$	(5,0) (0,10)
b $\bar{b}$	(6,0) (0,6)
c $\bar{c}$	(18,0) (0,4.5)



ولما كانت جميع القيود هي من نوع ≤ لذلك فأن منطقة الإمكانيات ستكون محددة بالمنطقة ذات الرؤوس $0\bar{c}MLa$ وهي المنطقة التي تحقق القيود مجتمعة وجميع نقاطها تعتبر حلولا لمشكلة البرمجة الخطية إلا أن النقطة المثلى يتم الحصول عليها بالصيغة الرياضية بعد تحديدها بيانيا حيث أن هذه النقطة تحقق أعظم ربح وهي أبعد نقطة من نقطة الأصل فأنها تقع على حدود المنطقة المحدبة في الشكل البياني أعلاه بحيث تمثلها المنطقة المحددة بالرؤوس $0\bar{c}MLa$ لذلك يستوجب الأمر تحديد إحداثيات كل نقطة من تلك النقاط :

1- النقطة 0 إحداثياتها $(0,0)$.

2- النقطة $\bar{C}$ إحداثياتها $(0,4.5)$.

3- النقطة M ويتم الحصول عليها من القيدين الثاني والثالث وكالآتي :

$$6X_1 + 6X_2 = 36 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$
$$4.5X_1 + 18X_2 = 81 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (3)$$

بضرب المعادلة (2) × 3 وطرح المعادلة (3) منها وكالآتي :

$$18X_1 + 18X_2 = 108 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$
$$-4.5X_1 - 18X_2 = -81 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (3)$$

$$13.5X_1 + 0 = 27$$
$$X_1 = 2$$

وبالتعويض في المعادلة (2) ينتج أن قيمة $X_2 = 4$
إذن إحداثيات النقطة M هي (2,4) .

وبنفس الصيغة نجد إحداثيات النقطة L (الناتجة من تقاطع القيدين الاول والثاني) وكالآتي :

$$10X_1 + 5X_2 = 50 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$
$$6X_1 + 6X_2 = 36 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

ومن المعادلة (1) فأن $X_1 = 5 - 0.5X_2$.

وبتعويضها في المعادلة (2) ينتج :

$$6(5 - 0.5X_2) + 6X_2 = 36$$
$$30 - 3X_2 + 6X_2 = 36$$
$$3X_2 = 6$$
$$X_2 = 2$$

إذن $X_1 = 4$
ومن هنا فأن إحداثيات النقطة L هي (4,2)

والآن يتم تحديد النقطة ذات الحل الأمثل كما في الجدول التالي :

النقطة	X_1	X_2	$Maximize Z = 9X_1 + 7X_2$
0	0	0	0
$\bar{c}$	0	4.5	31.5
M	2	4	46
L	4	2	50
A	5	0	45

ومـــن الجـــدول أعـــلاه يتضـــح أن النقطـــة L هـــي التـــي تمثـــل الحـــل الأمثـــل حيـــث يـــتم إنتـــاج أربـــع وحـــدات مـــن X_1 التـــي تمثـــل المحلـــول A ووحـــدتان مـــن المنـــتج X_2 التـــي تمثـــل المحلـــول B ليعطيـــان ربحـــا قـــدره (50) دينار.

<u>مثال (4) :</u>

أوجد الحل لنموذج البرمجة الخطية الاتية باستخدام الطريقة البيانية:

$$MinZ = 3X_1 + 4X_2$$
$$S.t:$$
$$4X_1 + 10X_2 \le 40$$
$$7X_1 + 8X_2 \le 56$$
$$X_1 \ge 3$$
$$X_1 , X_2 \ge 0$$

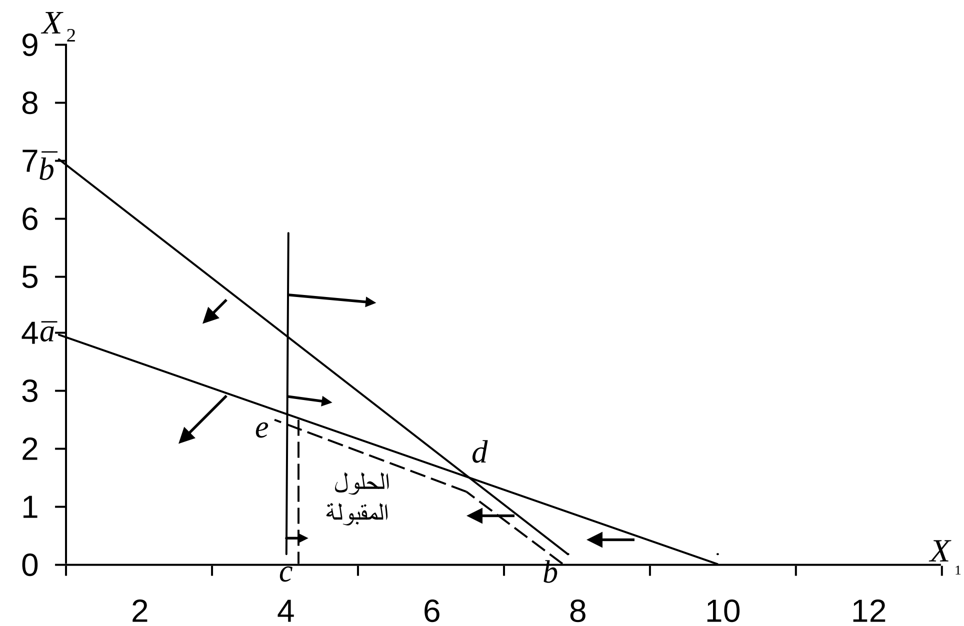
الحل :

$$4X_1 + 10X_2 = 40$$
$$7X_1 + 8X_2 = 56$$
$$X_1 = 3$$

- نستخرج نقاط التقاطع مع المحاور (الإحداثيات) :

القيد الأول : (10,0) ، (0,4)

القيد الثاني : (8,0) ، (0,7)
القيد الثالث : (3,0)



يلاحــــظ أن منطقـــــة الحـــــل المقبـــــول هـــــي : *cedb* لـــــذا نســـــتخرج إحــــداثيات النقطة d و e :

- نستخرج إحداثيات d الناتجة من تقاطع القيد الاول والثاني :
نضرب القيد الأول في 7 والقيد الثاني في 4 ثم نطرح القيد الثاني من الأول وكما يلي :

$$7(4X_1 + 10X_2 = 40)$$
$$4(7X_1 + 8X_2 = 56)$$

$$28X_1 + 70X_2 = 280$$
$$-28X_1 \mp 32X_2 = -224$$

$$X_2 = \frac{28}{19} = 1.473$$

$$X_1 = \frac{120}{19} = 6.315$$

- إحداثيات d : (1.473 ، 6.315)

بنفس الطريقة نستخرج إحداثيات e الناتجة من تقاطع القيد الاول مع الثالث عندما $X_1 = 3$ فان $X_2 = 2.8$

- إحداثيات e : (2.8 ، 3)

النقطة	X_1	X_2	$MinZ = 3X_1 + 4X_2$
c	3	0	9
e	3	2.8	20.2
d	6.315	1.473	24.837
b	8	0	24

بما أن الدالة دالة تدنية فأن نقطة c تمثل الحل الأمثل حيث تحقق أقل كلفة بواقع 9 ويكون الحل الأمثل :

$X_1 = 3$

$X_2 = 0$

$Z = 9$