طرق حل نموذج البرمجة الخطية

يتم حل نماذج البرمجة الخطية من أجل إيجاد قيم المتغيرات القرارية x_j والتي تعظم أو تقلل قيمة دالة الهدف. وتوجد عدة طرق للحل نذكر منها:-

الطريقة البيانية Graphical Method

تعد الطريقة البيانية أو طريقة الرسم البياني وسيلة أولية لحل مشاكل البرمجة الخطية وتستخدم إذا كان النموذج يحتوي على متغيرين فقط إذ يتعذر رسم النموذج في حالة احتواءه على أكثر من متغيرين وتقوم هذه الطريقة على فكرة تمثيل القيود بمعادلة خط مستقيم ومن ثم تحديد منطقة الحلول الممكنة ثم اختيار النقطة التي تحقق احسن قيمة لدالة الهدف .

خطوات الحل البياني :

1. تحويل القيود من متباينات الى معادلات وذلك بتحويل إشارات ($\geq$ و $\leq$) الى أشارة ($=$) .
2. نعوض بأحد المتغيرات في المعادلة الواحد بقيمة صفر لاستخراج قيمة المتغير الآخر ثم نكرر ذلك بالنسبة للمتغير الآخر وبذلك تصبح لدينا نقطتين لكل معادلة (مستقيم) بواسطة هاتين النقطتين يمكن رسم المستقيم الذي يمثله .
3. يرسم محورين أحداهما أفقي وليكن X_1 والآخر عمودي وليكن X_2 .
4. نرسم المستقيمات من معادلات القيود ونحدد المنطقة المقبولة والمنطقة المرفوضة (تحديد منطقة الحل).
5. تحديد الحل الأمثل البرنامج الخطي وذلك من خلال تعويض النقاط المحددة لمنطقة الحل المقبول في **دالة الهدف** ويكون الحل هو أكبر قيمة في الشكل الناتج إذا كانت دالة الهدف تعظيم وأصغر قيمة إذا كانت دالة الهدف تقليل.

- **تعني علامة أكبر أو يساوي ($\geq$) أن منطقة الحل على يمين أو أعلى الخط المستقيم .**
- **تعني علامة أصغر أو يساوي ($\leq$) أن منطقة الحل على يسار أو أسفل الخط المستقيم.**

مثال (1) :

أوجد الحل الأمثل لنموذج البرمجة الخطية الآتي بطريقة الرسم البياني:

$$Maximize Z = 40X_1 + 50X_2$$
$$S.t:$$
$$3X_1 + X_2 \le 15$$
$$X_1 + 2X_2 \le 12$$
$$X_1, X_2 \ge 0$$

تتلخص خطوات الحل بالطريقة البيانية في رسم القيود ومن ثم تحديد منطقة الحلول المقبولة ومن ثم يتم تحديد الحل الأمثل :

1- يتم تحويل القيود الى معادلات وكالآتي :

$$3X_1 + X_2 = 15 \text{ ....}(1)$$
$$X_1 + 2X_2 = 12 \quad \text{.....}(2)$$

2- يتم تحديد نقاط التقاطع للمعادلتين أعلاه ومن خلال رسم المستقيمات للوصول للحل الأمثل وكما يلي:

- معادلة القيد الأول :

$$3X_1 + X_2 = 15$$

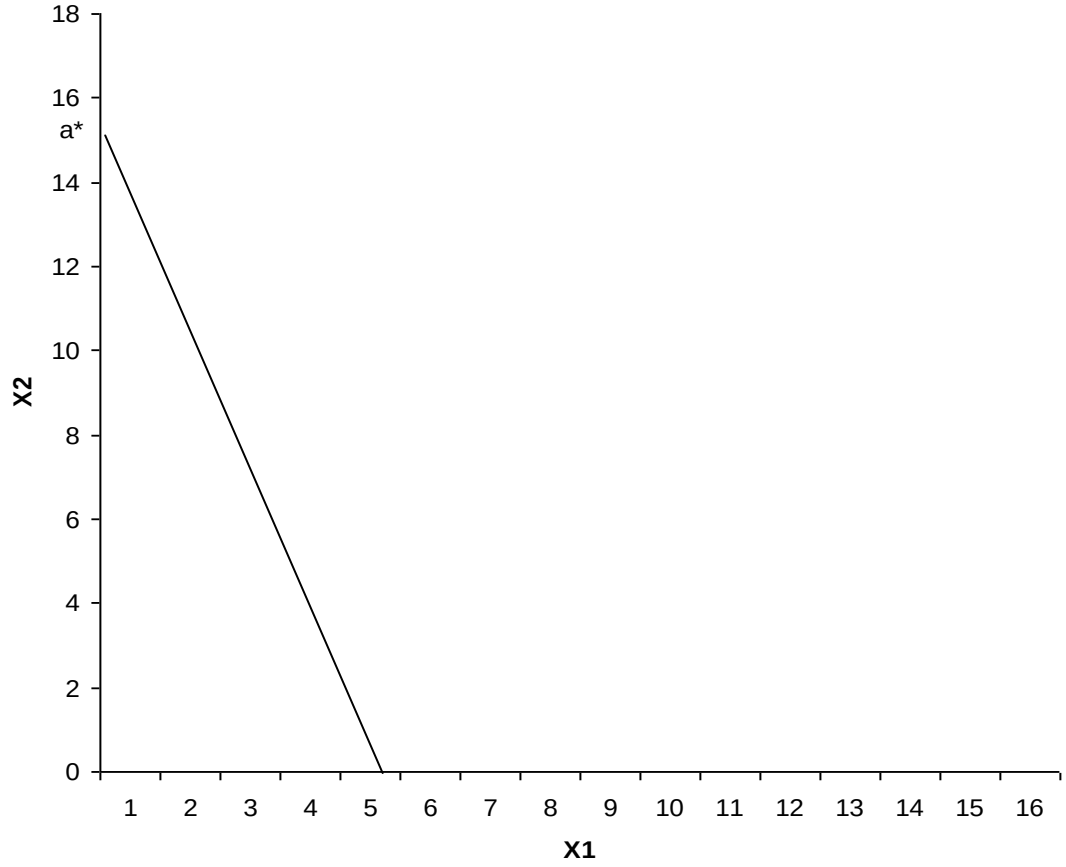
عندما $X_2 = 0$ فأن $X_1 = 5$

وبذلك نحصل على نقطة نطلق عليها a وتكون إحداثياتها (5,0) .

عندما $X_1 = 0$ فأن $X_2 = 15$

فنحصل على نقطة نطلق عليها *a وتكون إحداثياتها (0,15)

وبذلك يتم رسم القيد بصورة المستقيم والذي يحدد بالنقاط (0,15) و (5,0) وكما يلي :



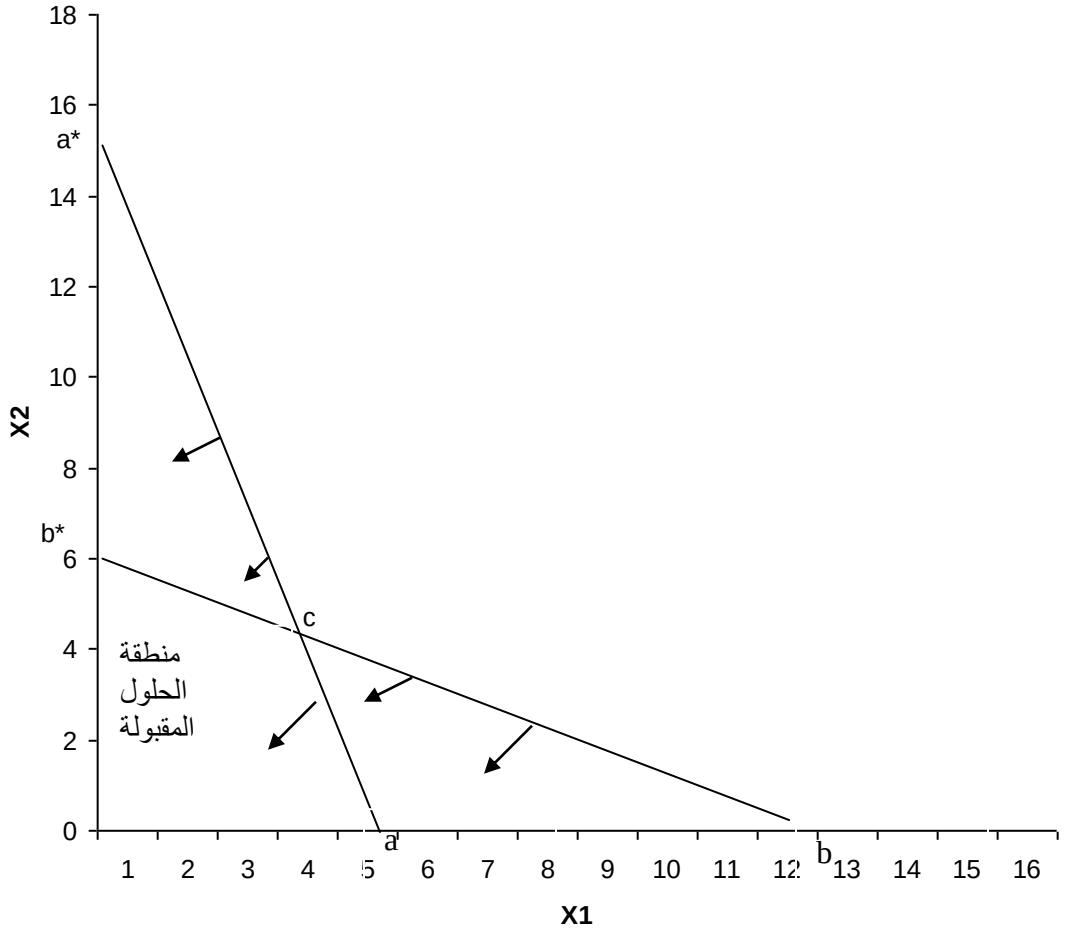
- معادلة القيد الثاني :

$$X_1 + 2X_2 = 12$$

عندما $X_2 = 0$ فأن $X_1 = 12$
وبذلك نحصل على نقطة نطلق علها b وتكون إحداثياتها (12,0) .

وعندما $X_1 = 0$ فأن $X_2 = 6$
وبذلك نحصل على نقطة نطلق عليها *b تكون إحداثياتها (0,6) .

وبذلك يتم رسم القيد الثاني بصورة المستقيم والذي يحدد بالنقاط ((12,0) و (0,6)
وعلى نفس الرسم السابق وكما يلي :



وبعد هذا نحدد منطقة الحلول الممكنة وحسب ما هو مطلوب من القيود وهي المنطقة التي تحقق جميع القيود في آن واحد وجميع نقاطها تعتبر حلولا لمشكلة البرمجة الخطية إلا أن النقطة المثلى يتم الحصول عليها بالصيغة الرياضية حيث أن هذه النقطة تحقق أعلى ربح وهي أبعد من نقطة الأصل فإنها تقع على حدود المنطقة المحدبة بحيث تمثلها النقطة المحددة بالرؤوس $0b^*ca$ وكما مبين بالشكل أعلاه وبما أن جميع احداثيات النقاط معلومة وهي $0b^*a$ ما عدا النقطة c فيتم استخراجها من إحداثيات نقطة التقاطع c نقوم بحل المعادلتين (1) و(2) آنيا حيث نقوم بضرب المعادلة (2) بـ 3 وطرحها من المعادلة (1) وكما يلي:

$$3X_1 + X_2 = 15 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \ldots(1)$$
$$-3X_1 - 6X_2 = -36 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(2)$$
$$0 - 5X_2 = -21$$

إذن:

$$X_2 = 4.2$$

وبتعويض قيمة X_2 في احدى المعادلتين أعلاه نحصل على: $X_1 = 3.6$

ثم يتم تحديد الحل الأمثل وذلك بتعويض كل من الحلول الأربعة في دالة الهدف لتعظيم الربح (ايجاد أكبر النقاط التي تعطي أكبر قيمة لـ Z لان الدالة هي Max) وكالآتي :

النقطة	X_1	X_2	$MaxZ = 40X_1 + 50X_2$
0	0	0	0
b*	0	6	300
c	3.6	4.2	354
a	5	0	200

من الجدول أعلاه نجد أن النقطة c تحقق لدالة الهدف قيمة عظمى مساوية الى 354 ومن خلال إنتاج 3.6 من X_1 و4.2 من X_2 .