الفصل الثاني – البرمجة الخطية

مفهوم البرمجة الخطية وأهميتها

تسعى البرمجة الخطية لإيجاد أفضل الإستعمالات للموارد المتاحة (التي تتصف بأنها محدودة كالمواد الأولية، الأيدي العاملة، المعدات، رأس المال،...الخ) بهدف إيجاد التوليفة المناسبة من تلك الموارد بما يحقق هدفا معينا (تعظيم الربح أو تقليل الكلفة) ويتم ذللك من خلال توظيف إسلوب رياضي معين. إذن يمكن القول أن البرمجة الخطية هي أداة رياضية تساعد على إتخاذ قرارات تتعلق بإستخدام الموارد المتاحة بهدف الوصول الى أعلى ربح أو أقل كلفة.

كما يمكن أن تعرف البرمجة الخطية على انها أحد النماذج الرياضية التي تعالج التخصيص الأمثل للموارد المحدودة بغية الحصول على حل أمثل من خلال بناء نموذج رياضي يكون قابلا للحل بأحد الأساليب الرياضية.

إن أهمية البرمجة الخطية تتمثل في كونها وسيلة لدراسة سلوك عدد كبير من الأنظمة وهي أسهل وأبسط أنواع النماذج الرياضية التي يمكن إنشاؤها لمعالجة مشاكل القطاعات الصناعية والخدمية ذات الصلة بإتخاذ القرار الإداري.

بناء نموذج البرمجة الخطية

وهي أهم مراحل البرمجة الخطية، إذ أن إنشاء نموذج صحيح ومتكامل سوف يؤدي الى الوصول للحل الصحيح. ويمكن تلخيص خطوات بناء النموذج البرمجة الخطية بما يأتي:

1- تعريف المتغيرات

ويقصد بالمتغيرات هنا متغيرات القرار أو المدخلات التي يمكن السيطرة عليها أو التحكم بها. ومن الأمثلة على متغيرات القرار هي: عدد الأطنان المنتجة من الطحين أو عدد براميل النفط المنتجة في إحدى الدول وهكذا. ويرمز لمتغيرات القرار بالرمز x_j.

2- صياغة دالة الهدف

وتمثل الهدف الذي تسعى الإدارة لتحقيقه. ودالة الهدف في نموذج البرمجة الخطية إما تكون دالة تعظيم maximum أو تخفيض minimum ويرمز لدالة الهدف بالرمز z كما يشار إالى مساهمة كل متغير في دالة الهدف بالحرف c_j .

3- تحديد القيود

وتمثل مجموعة الموارد في المشكلة ويرمز لها بالرمز b_i. والموارد في البرمجة الخطية عادة ماتكون محدودة بحيث تتنافس في إستغلالها متغيرات المشكلة حسب مقادير معينة يرمز لها بالرمز a_{ij} .

4- قيد عدم السلبية

ويشير هذا القيد إلى أن المتغيرات لا تأخذ قيمة سالبة.

وتكتب الصيغة العامة لنموذج البرمجة الخطية بشكل مختصر كما يلي:

Min or Max Z= $\sum_{j=1}^{n} c_j\, x_j$

S.to

$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, x_j \;\leq=\geq\; b_i \quad i = 1,2,\dots,m$

$x_j \geq 0$

حيث أن:

Z هي دالة الهدف (دالة ربح، دالة كلفة أو دالة إنتاج).

c_j يمثل مساهمة x_j في دالة الهدف وقد يمثل (سعر وحدة واحدة، هامش ربح وحدة واحدة أو تكلفة إنتاج وحدة واحدة).

x_j متغير القرار الذي يراد معرفة قيمته والذي يجب أن يكون كمية غير سالبة لأنه قد يمثل عدد الوحدات المنتجة مثلا.

a_{ij} أجزاء من كميات الموارد المحدودة التي يتطلبها المتغير.

b_i كميات الموارد المتاحة (أيدي عاملة، مواد خام، ساعات عمل،...الخ)

مثال (1)

تنتج شركة نوعين من المنتجات الكهربائية هما A و B. يمر كلا النوعين بقسمي التصنيع والانتاج. وتوضح البيانات المتوفرة لدى الشركة ان:

1- طاقة قسم التصنيع هي (1500) ساعة عمل ويحتاج كـل مقياس من النوع A الى (3) ســـاعات عمل ويحتاج كل مقياس من النوع B الى (2) ساعة عمل.

2- بينما تبلغ طاقة قسم التجميع (1000) ساعة عمل ويحتاج كل مقياس من النوع A الى (1) ساعة عمل ويحتاج كل مقياس من النوع B الى (4) ساعة عمل.

وتحقق الشركة ربحاً للوحدة الواحدة قدره (15) دولار من النوع A و (18) دولار من النوع B.

المطلوب: صياغة نموذج برمجة خطية للمشكلة أعلاه.

الحل:

يتطلب الامر انتاج النوعين خلال الوقت المتاح للعمليتين الاولى والثانية من اجل ان نحصل على اقصى ربح ممكن.

لذلك نقوم بالاتي من أجل صياغة نموذج برمجة خطية للمسألة أعلاه

اولاً : تعريف المتغيرات

نفرض ان عدد الوحدات التي يتم انتاجها من A :- X_1

نفرض ان عدد الوحدات التي يتم انتاجها من B :- X_2

ثانياً : دالة الهدف

إن هدف المشكلة هو تعظيم الأرباح لذا ستكون دالة الهدف من نوع التعظيم Max وتصاغ كالاتي:

$$MaxZ = 15X_1 + 18X_2$$

حيث أن 15 تمثل ربح الوحدة الواحدة من A وأن 18 تمثل ربح الوحدة الواحدة من B.

ثالثاً : القيود

القيد الاول (قيد العملية الاولى التصنيع): إن أقصى زمن متاح للعملية في قسم التصنيع هو 1500 ساعة عمل يومياً. وحيث أن الوحدة الواحدة من المنتج الاول (A) تحتاج الى تصنيعها الى 3 ساعات بينما الوحدة الواحدة من المنتج الثاني (B) الى 2 ساعة، فإنه يمكن صياغة القيد الاول كما يلي:

$$3X_1 + 2X_2 \leq 1500$$

القيد الثاني (قيد العملية الثانية التجميع): إن أقصى زمن متاح للعملية في قسم التجميع تحتاج الى 1000 ساعة عمل يوميا وحيث ان الوحدة الواحدة من المنتج الاول (A) تحتاج الى

تصنيعها الى 1 ساعة بينما الوحدة الواحدة من المنتج الثاني (B) الى 4 ساعات ، وبالتالي يمكن صياغة القيد الثاني كما يلي:

$$X_1 + 4X_2 \leq 1000$$

رابعاً : قيد عدم السالبية

إن قيم المتغيرات التي تم افتراضها أعلاه لايمكن أن يكون سالب، أي أن الوحدات المنتجة أما تأخذ قيمة موجبة (تنتج بمقدار معين) أو صفر (لا تنتج نهائياً). ويتم التعبير عن ذلك بما يسمى بقيد عدم السالبية وكما يلي:

$$X_1, X_2 \geq 0$$

وبذلك يمكن كتابة نموذج البرمجة الخطية بصورة كاملة وكما يلي:

$$Max Z = 15X_1 + 18X_2$$
$$S.to$$
$$3X_1 + 2X_2 \leq 1500$$
$$X_1 + 4X_2 \leq 1000$$
$$X_1, X_2 \geq 0$$

مثال (2)

تقوم إحدى الشركات بإنتاج نوعين من الأسمدة (A,B) علما أن الشركة تحتاج الى 20 ساعـــة لإنتاج طـن واحد من النوع A ، و30 ساعة لإنتاج طـن واحـد من النوع B. وأن الوقت المتاح سنويا للإنتاج هو 1200 ساعة. كما إن الطلبات على هـــذين المنتوجين لا يزيد على 40 طن من A سنويا ، ولا يزيد عن 30 طن من B سنوياً. ان تكلفة إنتاج الطن الواحد من A هو 10000 دينار ،و تكلفة إنتاج الطن الواحد من B هو 15000 دينار.

المطلوب : صياغة المشكلة بصيغة برمجة خطية لتقليل التكاليف.

الحل :

بإتباع نفس الاسلوب في المثال السابق يمكن صياغة نموذج برمجة خطية وكالاتي:

نفرض ان عدد الوحدات التي يتم انتاجها من A :- X_1

نفرض ان عدد الوحدات التي يتم انتاجها من B :- X_2

$$MinZ = 10000X_1 + 15000X_2$$

$$S.to$$

$$20X_1 + 30X_2 \leq 1200$$

$$X_1 \leq 40$$

$$X_2 \leq 30$$

$$X_1, X_2 \geq 0$$