$$2.\ \lim_{x\to1}\frac{x^2-5x+4}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{(x-4)\cancel{(x-1)}}{\cancel{x-1}}$$

$$=\lim_{x\to1}x-4=1-4=-3\ .$$

$$3.\ \lim_{x\to-1}\frac{x+1}{x^3+1}=\lim_{x\to-1}\frac{\cancel{x+1}}{\cancel{(x+1)}\left(x^2+x+1\right)}$$

$$=\lim_{x\to-1}\frac{1}{\left(x^2+x+1\right)}=\frac{1}{(-1)^2+(-1)+1}=1\ .$$

$$4.\ \lim_{x\to2}\frac{x^2-4}{3x-6}=\lim_{x\to2}\frac{\cancel{(x-2)}(x+2)}{3\cancel{(x-2)}}=\lim_{x\to2}\frac{x+2}{3}=\frac{2+2}{3}=\frac{4}{3}$$

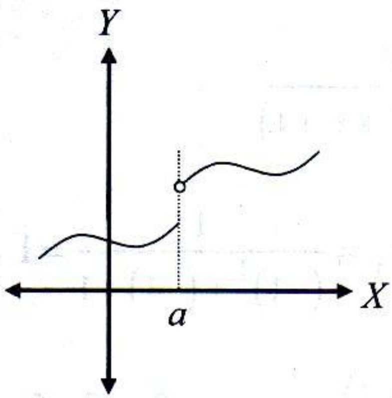
(7 – 2) اتصال الدالة:

إن موضوع اتصال الدوال هو أحد الموضوعات الهامة في دراسة التفاضل والتكامل حيث يعد المدخل الرئيسي لإيجاد مشتقات الدوال وتكاملاتها والتي سيتم شرحها لاحقاً. والان نقدم دراسة بسيطة لمفهوم اتصال الدالة.

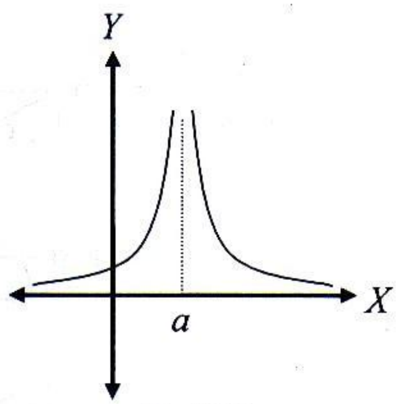
نقصد بقولنا أن الدالة $f(x)$ متصلة على الفترة $[a,b]$ أن منحنى الدالة $f(x)$ متصل دون انقطاع خلال الفترة $[a,b]$ التي يتغير فيها x ، أو بمعنى اخر إذا أمكننا أن نرسم منحنى الدالة في هذه الفترة دون أن نرفع سن القلم عن الورقة التي نرسم عليها، أي يكون منحنى الدالة في هذه الحالة خالياً من الإنقطاعات أو القفزات. وهذا يعني أن $f(x_0)$ معرفه عند كل نقطة x_0 في الفترة $[a,b]$ وأن

$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$. أما النقط التي يحدث عندها انقطاع في المنحنى الممثل للدالة فتسمى نقط عدم الاتصال (أي أن الدالة غير متصلة عندها).

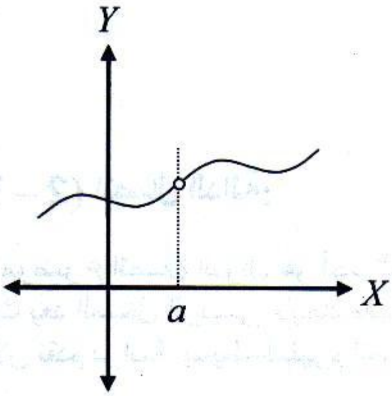
والان سنستعرض منحنيات بعض الدوال بهدف تبيان الاتصال وعدم الاتصال.



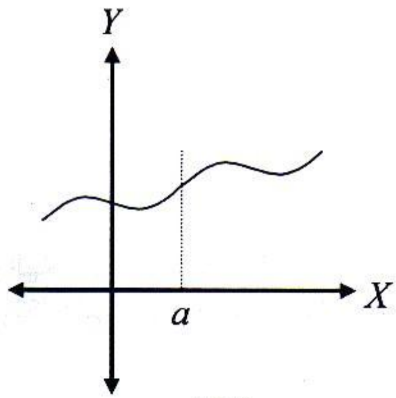
الشكل A



الشكل B



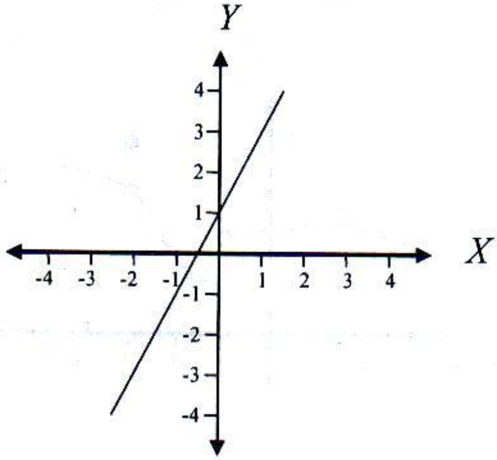
الشكل C



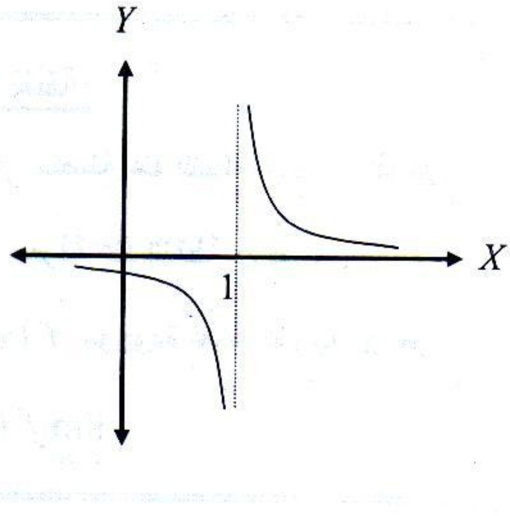
الشكل D

نلاحظ من الشكل A و B و C وجود انقطاع بمنحنى الدالة عند النقطة $x = a$ ولهذا فإننا نقول أن الدالة $f(x)$ هي دالة غير متصلة عند تلك النقطة. أما في الشكل D فإننا نلاحظ أن منحنى الدالة لايوجد به انقطاع عند النقطة $x = a$ ولهذا نقول أن الدالة $f(x)$ متصلة عند النقطة $x = a$.

إذا رسمنا الدالة $f(x) = 2x + 1$ فنجد أن منحنى الدالة $f(x)$ متصل عند أي قيمة $x \in \mathbb{R}$. ولهذا نقول أن الدالة $f(x)$ متصله على $\mathbb{R}$. انظر الشكل التالي:

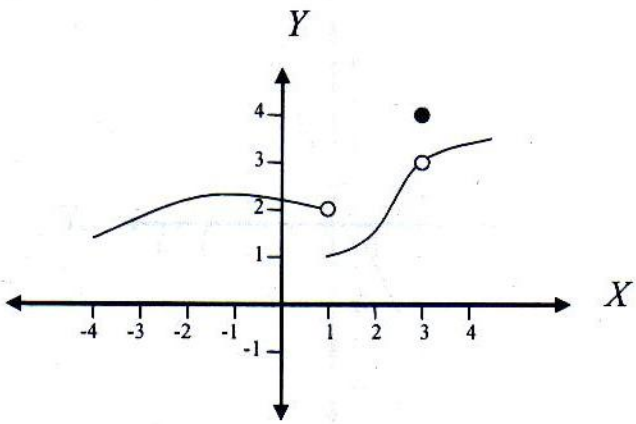


بينما إذا رسمنا الدالة $f(x) = \frac{2}{x-1}$ فنجد أن منحنى الدالـة $f(x)$ غير متصل عند $x = 1$ لأن الدالـة غير معرفة عند $x = 1$. ولكن الدالـة متصلة عند أي قيمة أخرى لـ x غير العدد واحد، ولهذا نقول أن الدالـة $f(x)$ متصله على $\mathbb{R} - \{1\}$ والشكل التالي يمثل منحنى هذه الدالة:



مثال (5):

أوجد نقاط عدم الاتصال للدالة الممثلة بالمنحنى التالي:



الحل: إذا نظرنا إلى المنحنى الممثل للدالة $f(x)$ سوف نجد به انقطاع عند النقطة $x = 1$ $x = 3$ ولهذا فإن الدالة تكون غير متصلة عند تلك النقط، أي أن نقاط عدم الاتصال للدالة $f(x)$ هي عند $x = 1$ و $x = 3$. لاحظ عند $x = 3$ أن $f(3)$ معرف ولكن $\lim_{x \to 3} f(x) \neq f(3)$.

<u>اتصال الدالة عند نقطة:</u>

تكون الدالة $f(x)$ متصلة عند النقطة $x = a$ إذا كان:

1. **الدالة $f(x)$ معرفة عند النقطة $x = a$.**
2. **نهاية الدالة $f(x)$ موجودة عندما تقترب x من a .**
3. $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$.

ونتيجة لهذا التعريف فإن دوال كثيرات الحدود و دوال القيمة المطلقة تكون متصلة عند كل $x \in \mathbb{R}$ ولا تسبب لنا مشكلة في اتصالها. ولكن تظهر المشكلة في الدوال النسبية عند قيم x التي تجعل مقام الدالة النسبية مساوياً الصفر.

مثال (6):

ابحث اتصال الدوال التالية عند النقط المشار إليها:

1. $f(x) = 3x^2 + x - 6 \quad , \quad x = 2 .$

2. $f(x) = \dfrac{x+1}{x^2-1} \quad , \quad x = -1 .$

3. $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-4}{x-2} & x \neq 2 \\ 2x & x = 2 \end{cases} \quad , \quad x = 2 .$

4. $f(x) = \begin{cases} 5x-1 & x < 1 \\ 2x - x^2 & x \geq 1 \end{cases} \quad , \quad x = 1 .$

5. $f(x) = \begin{cases} 4x+2 & x < 3 \\ 5x-3 & x = 3 \\ x^2+x+2 & x > 3 \end{cases} \quad , \quad x = 3 .$

الحل:

1. $\lim\limits_{x \to 2} f(x) = \lim\limits_{x \to 2} 3x^2 + x - 6 = 3(2)^2 + (2) - 6 = 8 .$

$$f(2)=3(2)^2+(2)-6=8\ .$$

وبما أن $\lim\limits_{x\to 2} f(x)=f(2)$ فإن الدالة $f(x)$ متصلة عند $x=2$.

2.

إن $f(-1)$ غير معرف حيث لو عوضنا $x=-1$ في الدالة لنتج لدينا الكمية غير المحددة $\frac{0}{0}$ ولذلك فإن إحدى شروط الإتصال غير متحقق وبالتالي $f(x)$ غير متصل عند $x=-1$ على الرغم أن النهاية موجودة وتساوي $\frac{-1}{2}$.

3. $\lim\limits_{x\to 2} f(x)=\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^2-4}{x-2}\ .$

$$=\lim_{x\to 2} \frac{\cancel{(x-2)}(x+2)}{\cancel{x-2}}=\lim_{x\to 2} x+2=4\ .$$

$$f(2)=2(2)=4\ .$$

وبما أن $\lim\limits_{x\to 2} f(x)=f(2)$ فإن $f(x)$ متصلة عند $x=2$.

4. $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+} 2x-x^2=2(1)-(1)^2=1\ .$

$$\lim_{x\to 1^-} f(x)=\lim_{x\to 1^-} 5x-1=5(1)-1=4\ .$$

وبمـــا أن $\lim_{x \to 1^-} f(x) \neq \lim_{x \to 1^+} f(x)$ فـــإن نهايـــة الدالـــة $f(x)$ $\left(\lim_{x \to 1} f(x)\right)$ غير موجودة، ولذلك فإن إحدى شروط الإتصال غير متحقق وبالتالي $f(x)$ غير متصل عند $x = 1$.

5. $\lim_{x \to 3^+} f(x) = \lim_{x \to 3^+} x^2 + x + 2 = (3)^2 + (3) + 2 = 14$.

$$\lim_{x \to 3^-} f(x) = \lim_{x \to 3^-} 4x + 2 = 4(3) + 2 = 14 .$$

إذاً قيمة $\lim_{x \to 3} f(x) = 14$.

ولكن $f(3) = 5(3) - 3 = 12$.

وحيث أن $\lim_{x \to 3} f(x) \neq f(3)$ فإن $f(x)$ غير متصل عند $x = 3$.

(7 – 3) مشتقة الدالة عند نقطة وتفسيرها الهندسي:

قبل أن نبدأ في تقديم مفهوم المشتقة نود أن نتعلم أولاً كيفية إيجاد خط التماس لمنحنى دالة ما لأن ذلك يساعدنا بدرجة كبيرة في فهم المعنى الهندسي للمشتقة.

<u>المماس لمنحنى عند نقطة:</u>

تعتمد كثير من مسائل علم التفاضل على إيجاد خط التماس لمنحنى ما عند نقطة محددة واقعة عليه. فيعرف خط التماس لدائرة عند نقطة ما p واقعة عليه بأنه الخط الذي يتقاطع مع منحنى الدائرة في نقطة واحدة فقط هي النقطة p نفسها ويسمى هذا الخط بمماس الدائرة عند p . انظر الشكل التالي: