مدخل لتفاضل الدوال

يعتبر التفاضل من أهم فروع الرياضيات وله تطبيقات عملية واسعة ومتنوعة في العلوم الطبيعية والاقتصادية الإدارية. وفي هذا الفصل سندرس مشتقة الدالة وكيفية إيجادها والمعنى الهندسي لها، ويمكن باستخدام حساب التفاضل الإجابة على الكثير من التساؤلات حول سلوك الدالة مثل معرفة أعلى وأدنى قيمة لها خلال فترة معينة. وسنقدم أولاً مفهوم نهاية واتصال دالة عند نقطة والتي هي الأساس في دراسة تفاضل الدوال.

(7 – 1) مفهوم النهاية:

سنقدم هنا مفهوم النهاية بصورة مبسطة يسهل على الطالب استيعابها. حيث تكمن أهمية نهاية دالة في أنها تصف وبصورة دقيقة سلوك الدالة $f(x)$ عندما تقترب x من قيمة معينة.

مثلا لنعتبر الدالة: $$f(x)=\frac{x^2-1}{x-1}$$

المعرفة على كل $\mathbb{R}$ باستثناء $\{1\}$ لأن مقام $f(x)$ غير معرفة عند $x=1$.
لنتتبع قيم الدالة $f(x)$ حول $x=1$ كما في الجدول التالي :

x	0.9	0.99	0.999	1	1.001	1.01	1.1
$f(x)$	1.9	1.99	1.999		2.001	2.01	2.1

نلاحظ من الجدول أنه عندما تقترب x من العدد 1 (ولكنها لا تأخذ القيمة 1) ، سواء من اليمين – أي تأخذ x قيم أكبر من الواحد - أو سواء من اليسار – أي تأخذ x قيم أصغر من الواحد - فإن قيمة $f(x)$ تقترب من 2 ونشير إلى هذه الحقيقة

بالقول (أن نهاية $f(x)$ عندما تقترب x من 1 هي 2) ويعبر عن هذا رمزياً على النحو التالي:

$$\boxed{\lim_{x\to 1} f(x) = \lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{x-1} = 2}\ .$$

حيث أن الرمز $(x \to 1)$ يدل على أن x تقترب من 1 ولا تساويها.

وتكتب نهاية الدالة عندما يكون اقتراب x بقيم أكبر من 1 على النحو التالي:

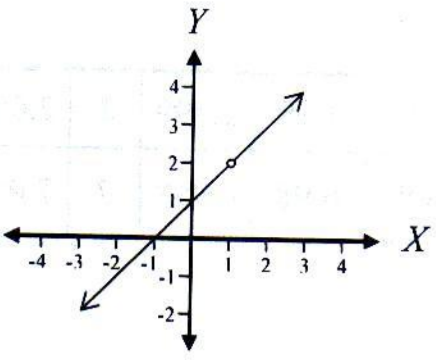
$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = 2\ .$$

وتسمى نهاية الدالة من جهة اليمين، حيث يدل الرمز $(x \to 1^+)$ على اقتراب x من يمين العدد 1. في حين تكتب نهاية الدالة عندما يكون اقتراب x بقيم أصغر من 1 على النحو التالي:

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = 2\ .$$

وتسمى نهاية الدالة من جهة اليسار، حيث يدل الرمز $(x \to 1^-)$ على اقتراب x من يسار العدد 1 .

ويوضح الشكل التالي أن الدالة غير معرفة عند النقطة $x = 1$ إلا أن قيمة الدالة تقترب من 2 عندما تقترب x من 1 من جهة اليمين أو من جهة اليسار .



<u>نهاية الدالة عند نقطة:</u>

إذا كانت الدالة $f(x)$ معرفة على جميع النقاط القريبة من النقطة $x = a$ ، وكانت قيمة الدالة $f(x)$ تقترب من عدد معين L عندما تقترب x من العدد a سواءً من جهة اليمين أو من جهة اليسار. عندئذٍ نقول إن نهاية الدالة عندما تقترب x من a هي L . ونعبر عن ذلك رمزياً على الصورة :

$$\lim_{x \to a} f(x) = L \ .$$

يوضح التعريف السابق أنه إذا كانت نهاية الدالة $f(x)$ من اليمين ومن اليسار متساوية وتساوي L عندما تقترب x من a فإن نهاية الدالة $f(x)$ عند النقطة a موجودة وتساوي L .

أما إذا كانت $\lim_{x \to a^-} f(x) \neq \lim_{x \to a^+} f(x)$ فإن $\lim_{x \to a} f(x)$ غير موجودة.

مثال (1):

أوجد قيمة $\lim_{x \to 2} 2x + 3$.

الحل:

نكون الجدول التالي:

x	1.9	1.99	1.999	2	2.001	2.01	2.1
$f(x)$	6.8	6.98	6.998	7	7.002	7.02	7.2

يبين لنا الجدول أن:

$$\lim_{x \to 2^+} (2x+3) = \lim_{x \to 2^-} (2x+3) = 7 .$$

وبما أن النهاية للدالة $2x+3$ من اليمين تساوي النهاية من اليسار فإن:

$$\lim_{x \to 2} (2x+3) = 7 .$$

<u>**خصائص النهايات:**</u>

إذا كانت $f(x)$ و $g(x)$ دالتين في x وكان $c, a \in \mathbb{R}$ فإن:

1. $\lim\limits_{x \to a} c = c$. **أي أن نهاية الدالة الثابتة هي القيمة الثابتة للدالة**
2. $\lim\limits_{x \to a} x^n = a^n$.
3. $\lim\limits_{x \to a} cf(x) = c \lim\limits_{x \to a} f(x)$.
4. $\lim\limits_{x \to a} [f(x) \pm g(x)] = \lim\limits_{x \to a} f(x) \pm \lim\limits_{x \to a} g(x)$.
5. $\lim\limits_{x \to a} [f(x).g(x)] = \left[\lim\limits_{x \to a} f(x)\right].\left[\lim\limits_{x \to a} g(x)\right]$.
6. $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim\limits_{x \to a} f(x)}{\lim\limits_{x \to a} g(x)} \quad , \quad \lim\limits_{x \to a} g(x) \neq 0$.
7. $\lim\limits_{x \to a} [f(x)]^n = \left[\lim\limits_{x \to a} f(x)\right]^n$.

ومن هذه الخصائص يمكن إثبات أنه إذا كانت $f(x)$ دالة كثيرة الحدود وكان a عدد حقيقي فإن: