الدالة الخطية:

هي أي دالة على الصورة $f(x) = ax + b$ حيث $a \neq 0$.

مثال (4):

لتكن $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ علاقة معرفة بالقاعدة:

$f(x) = |x|$ لجميع القيم $x \in \mathbb{R}$.

1. أثبت أن f في الواقع دالة.
2. أوجد الصور $f(0)$, $f(1)$, $f(-1)$.
3. ما هي العلاقة بين $f(x)$ و $f(-x)$.
4. أرسم منحنى هذه الدالة.

الحل:

1. سنثبت تحقق شرطي تعريف الدالة المذكورين أعلاه فنلاحظ:

أ) لأي $x \in \mathbb{R}$ فإن القيمة المطلقة $|x|$ دائماً معرفة لذلك الصورة $f(x) = |x|$ معرفة لجميع قيم x .

ب) إن القيمة المطلقة $|x|$ وحيدة ولايمكن أن يوجد قيمتان مطلقتان مختلفتان لنفس العدد x لذا فإن الصورة $f(x) = |x|$ وحيدة.

من تحقق (أ) و (ب) ينتج أن f دالة.

2. $f(-1)=|-1|=1$ ، $f(1)=|1|=1$ ، $f(0)=|0|=0$.

3. عند $x=0$ فإن $f(x)=|0|=0=f(-x)$

عند $x>0$ فإن $f(x)=|x|=x=|-x|=f(-x)$

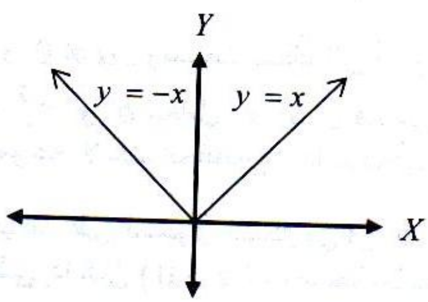
عند $x<0$ فإن $f(x)=|x|=-x=|-x|=f(-x)$

لذا في جميع الحالات الممكنة لقيم x فإن $f(x)=f(-x)$ وهي العلاقة المطلوبة.

4. لرسم منحنى الدالة $f(x)=|x|$ لدينا حالتان:

أ) عندما $x\geq 0$: في هذه الحالة $|x|=x$ أي أن $f(x)=x$ وبالتالي لدينا المعادلة $y=x$ وهي تمثل نصف الخط المستقيم المنصف للربع الأول والمنبعث من نقطة الأصل كما في الشكل أدناه.

ب) عندما $x<0$: في هذه الحالة $|x|=-x$ وبالتالي نحصل على $y=-x$ وهي تمثل نصف المستقيم المنصف للربع الثاني والمنبعث أيضاً من نقطة الأصل كما في الشكل:



من (أ) و (ب) فإن منحنى الدالة $f(x)=|x|$ هو إتحاد نصفي الخطين الموضحين في الشكل.

لاحظ التماثل بين فرعي منحنى الدالة حول محور الصادات Y بسبب أن $f(x)=f(-x)$ كما رأينا في الفقرة (3).

مثال (5):

لنعتبر العلاقة $g:[-1,1]\to\mathbb{R}$ حيث $g(x)=\sqrt{x}$. ناقش هل هذه العلاقة دالة أم لا؟

الحل:

من المعروف أن الجذر التربيعي $\sqrt{x}$ معرف فقط في حالة x عدد غير سالب لذلك على وجه الخصوص $\sqrt{-1}$ غير معرف أي أن الصورة $g(-1)$ غير موجودة وهذا يخل بالشرط (1) من شرطي تعريف الدالة لذلك فإن العلاقة g ليست دالة.

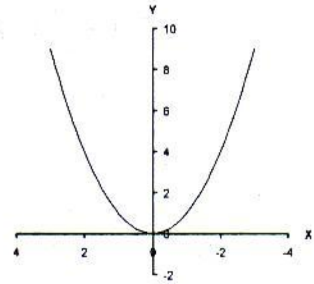
<u>الدالة التربيعية:</u>

تكون الدالة $y=f(x)$ دالة تربيعية أي دالة من الدرجة الثانية إذا كانت على الصيغة:

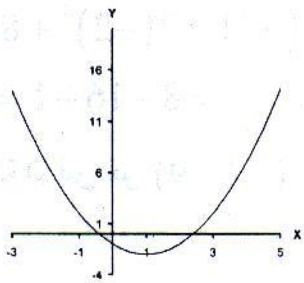
$$f(x)=ax^2+bx+c$$

حيث $a,b,c\in\mathbb{R}$ و $a\neq 0$, وسميت بذلك لأن أكبر أس للمتغير x هو العدد 2 . ويسمى a معامل x^2. و b معامل x أما c فيسمى بالحد المطلق ومجال الدالة التربيعية دائما هو مجموعة الأعداد الحقيقية إلا إذا تم تحديده مسبقاً.

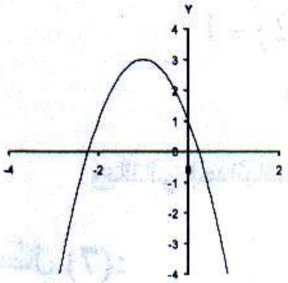
وعند تمثيل الدالة التربيعية بيانيا على المستوى الديكارتي فإن الشكل الناتج يسمى قطع مكافئ ويكون مفتوحاً للأعلى إذا كان $(a>0)$ ومفتوحاً للأسفل إذا كان $(a<0)$ وإحداثيات رأس القطع المكافئ هي $\left(\frac{-b}{2a}, f\left(\frac{-b}{2a}\right)\right)$ والأشكال التالية تمثل أنماطاً مختلفة من القطوع المكافئة.



$f(x) = x^2$



$f(x) = x^2 - 2x - 1$



$f(x) = -2x^2 - 4x + 1$

مثال (6):

للدالة $f(x) = 2x^2 + 8x - 1$ أوجد:

1. معامل x^2 و معامل x و الحد المطلق.
2. إحداثيات نقطة رأس القطع المكافئ.

الحل:

1. معامل x^2 يساوي 2 .
معامل x يساوي 8 .
الحد المطلق يساوي -1 .
2. إحـــداثيات الـــرأس هـــي $\left(\frac{-b}{2a}, f\left(\frac{-b}{2a}\right)\right)$ حيــث $a = 2$ و $b = 8$ و $: c = -1$

$$\frac{-b}{2a} = \frac{-8}{2(2)} = \frac{-8}{4} = -2$$

$$f\left(\tfrac{-b}{2a}\right)=f(-2)=2(-2)^2+8(-2)-1$$
$$=8-16-1=-9$$

وبالتالي إحداثيات نقطة الرأس هو $(-2,-9)$.

مثال (7):

مثل الدالة $f(x)=x^2+2x+2$ بيانيا على مستوى الديكارتي مع تحديد المجال والمجال المقابل

الحل:

أولا نجد إحداثيات نقطة رأس القطع المكافئ حيث $a=1$ و $b=2$ و $c=2$:

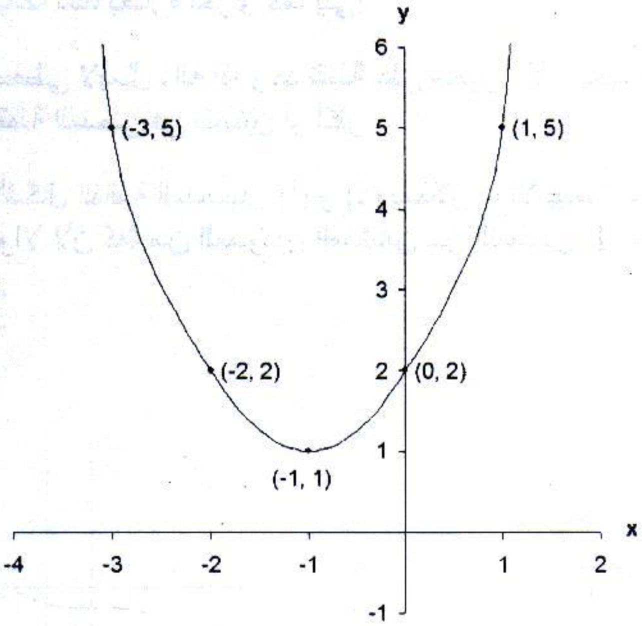
$$\frac{-b}{2a}=\frac{-2}{2(1)}=\frac{-2}{2}=-1$$

$$f\left(\tfrac{-b}{2a}\right)=f(-1)=(-1)^2+2(-1)+2$$
$$=1-2+2=1$$

وبالتالي إحداثيات نقطة رأس القطع المكافئ هي $(-1,1)$.

وسوف نختار قيم للمتغير x تكون أكبر من وأصغر من قيمة x في إحداثيات نقطة رأس القطع المكافئ. على سبيل المثال $x=0$ و $x=1$ و $x=-2$ و $x=-3$.

x	-3	-2	-1	0	1
$f(x)$	5	2	1	2	5



لاحظ أن القطع المكافي في هذه الدالـة مفتـوح لأعلـى وذلك لأن $a = 1$ (أي أكبر من صفر).

مجال الدالة هي مجموعة الأعداد الحقيقية أما المجال المقابل فيساوي $[1, \infty)$ لأن أقل قيمة للدالة $f(x)$ هي 1 (انظر الرسم البياني) وأما أكبر قيمة غير محددة.

أحياناً يكون لدينا منحنى معطى في المستوى الديكارتي ونحتاج لمعرفة هل هذا المنحنى يمثل دالة أم لا؟ وفي الواقع لدينا معيار بسيط ودقيق للإجابة على ذلك وهو:

<u>معيار تمثيل منحنى الدالة:</u>

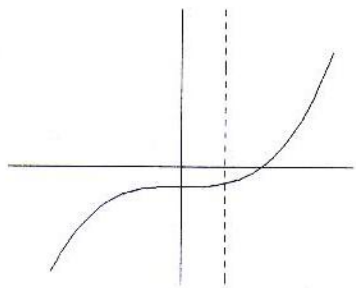
إذا أعطينا منحنى في المستوى الديكارتي فإنه يلزم ويكفي لتمثيل هذا المنحنى دالة أن يحقق الشرط التالي:

إذا أنشأنا عموداً من أي نقطة على المحور السيني X فإنه يقطع المنحنى المعطى في نقطة واحدة على الأكثر.

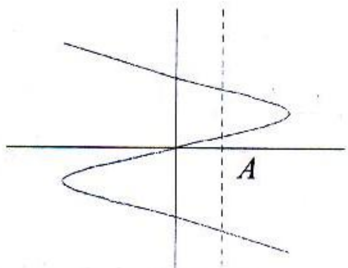
ويمكن صياغة ذلك بعبارة أخرى كما يلي:

المنحنى المعطى لايمثل دالة إذا وجد نقطة على محور X بحيث يقطع العمود المنشأ من هذه النقطة المنحنى في نقطتين أو أكثر.

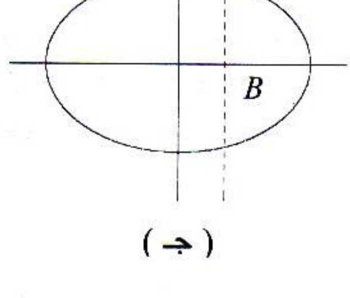
مثلاً في الأشكال التالية المنحنيان (أ) و (د) يمثلان دوالاً بينما المنحنيان (ب) و (جـ) لايمثلان دوالاً لأن كلاً من العمودين المنشأين من النقطتين A و B يقطع المنحنى في نقطتين.



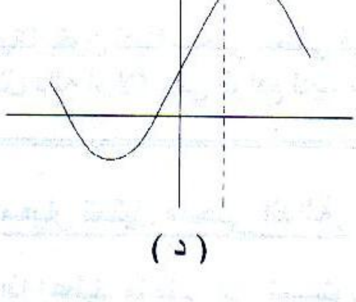
(أ)



(ب)



(جـ)



(د)