

الدوال

(6 - 1) مفهوم الدالة:

إن مفهوم الدالة من أهم المفاهيم في الرياضيات زهز العامل الأساسي في التطبيقات المذهلة للرياضيات في سائر العلوم وعلى وجه الخصوص في علمي الإقتصاد والإدارة.

تعريف الدالة:

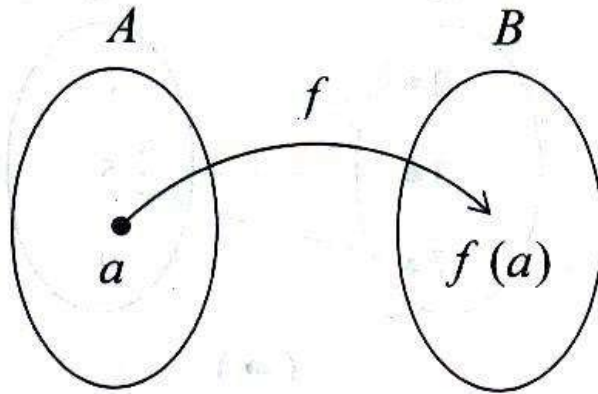
الدالة من مجموعة A إلى المجموعة B وتكتب $f : A \rightarrow B$ هي علاقة تربط كل عنصر $a \in A$ بعنصر وحيد $b \in B$ يسمى صورة a ويرمز له بالرمز $f(a)$. كما نسمي المجموعة A مجال تعريف الدالة f والمجموعة B المجال المقابل لها.

طبعاً يمكن استخدام رموز أخرى للدالة بدلاً من f مثل g , h وغيرها. لاحظ من التعريف أن الدالة f يجب أن تحقق شرطين وهما:

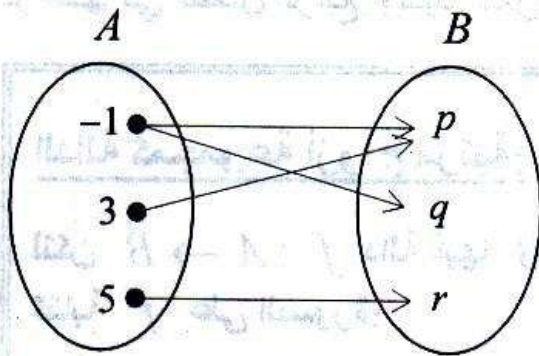
شرطا تعريف الدالة:

1. لكل $a \in A$ يوجد صورة $f(a) \in B$.
2. الصورة $f(a)$ وحيدة بمعنى إذا كان كلاً من $b_1, b_2 \in B$ صورة لنفس العنصر $a \in A$ فلا بد أن يتساويان.

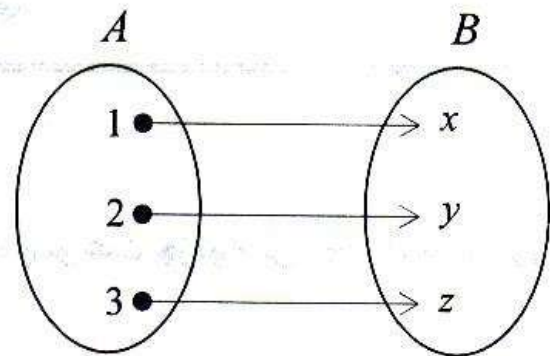
ويمكن للتوضيح تمثيل الدوال بأشكال فن على الصورة:



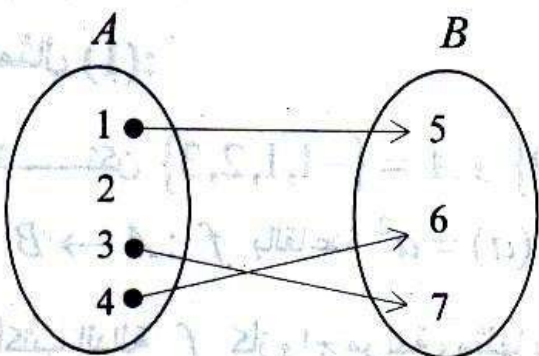
فمثلاً في الأشكال التالية كل من (أ) و (ب) و (ج) و (د) يمثل دالة أما الشكلان (هـ) و (و) فلا يمثلان دالة (لماذا؟) .



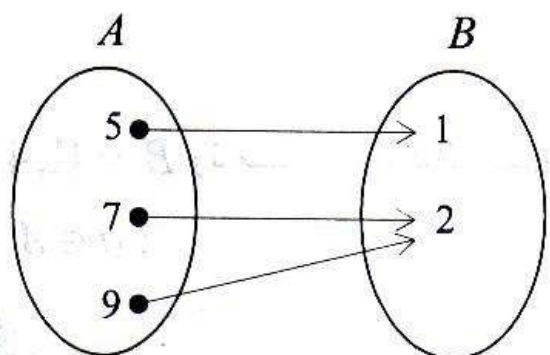
(ب)



(أ)



(د)



(ج)

مثال / ارسم الأزواج المرتبة بشكل فن وهل يمثل دالة ام لا ؟

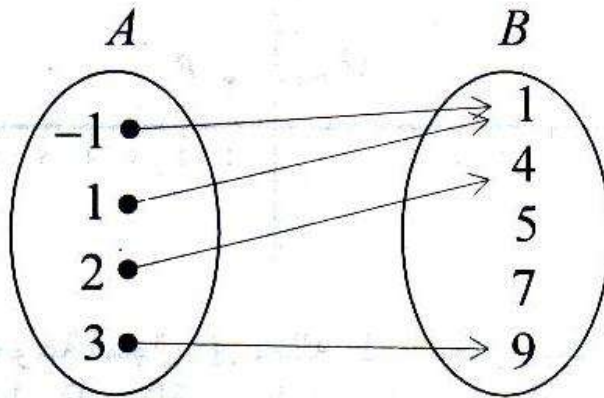
$$A = \{-1, 1, 2, 3\}, B = \{1, 4, 5, 7, 9\}$$

الحل:

$$f = \{ (a, f(a)) \mid a \in A \}$$

$$= \{ (-1,1), (1,1), (2,4), (3,9) \} .$$

وتمثل بشكل فن الموضح:



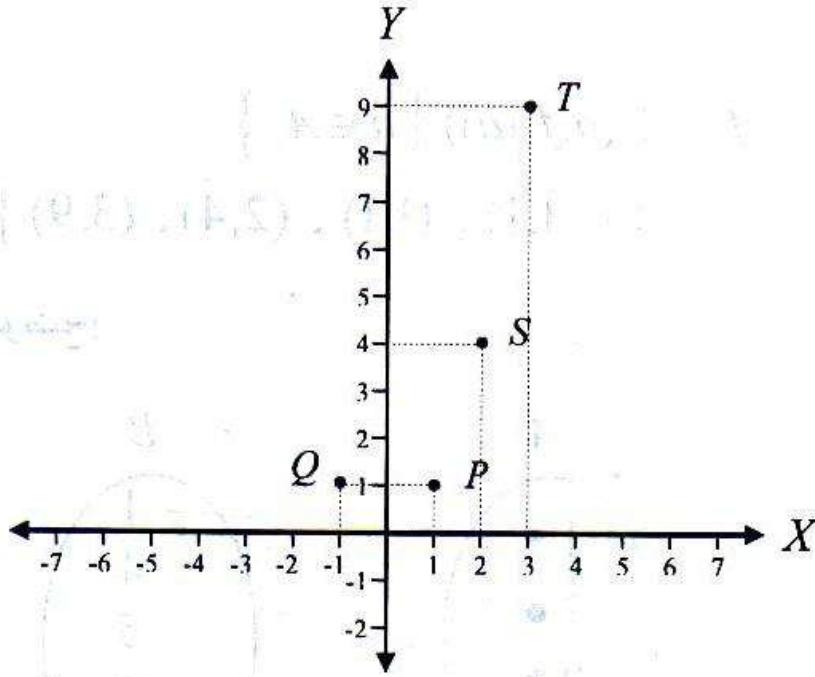
أيضاً في حالة الدوال المعرفة بين مجموعات جزئية من \mathbb{R} يمكننا رسم الدوال بشكل أكثر فعالية من أشكال فن وذلك بتمثيلها كنقاط في المستوى الإحداثي XY .

مثال (2):

مثل الدالة في المثال (1) في المستوى الديكارتي.

الحل:

لدينا $f = \{ (-1,1), (1,1), (2,4), (3,9) \}$ ويمكننا تمثيل هذه الأزواج في المستوى الديكارتي بالنقاط T, S, Q, P كما هو موضح.



لاحظ أن عناصر مجموعة المجال A ممثلة على المحور السيني X ، بينما عناصر مجموعة المجال المقابل B ممثلة على المحور الصادي Y .

(6 - 2) الدوال المعرفة على فترات حقيقية:

إن معظم الدوال التي نتعامل معها في التطبيقات تكون معرفة على فترة حقيقية (مفتوحة أو مغلقة أو غيرها) ومجالها المقابل أيضاً فترة حقيقية. وفي هذه الحالة فإن تمثيل الدالة في المستوى الديكارتي يكون على شكل منحنى متصل أو خط مستقيم أو متكسر والذي نسميه بشكل عام منحنى الدالة.

مثال (3):

لتعرف الدالة $f : [0, 4) \rightarrow \mathbb{R}$ بالقاعدة: لكل $x \in [0, 4)$ فإن $f(x) = 3x$

1. أوجد الصورة $f(1)$, $f(2)$, $f(4)$.

2. مثل الدالة بالمستوى الديكارتي.

الحل:

$$1. \quad f(1) = 3(1) = 3$$

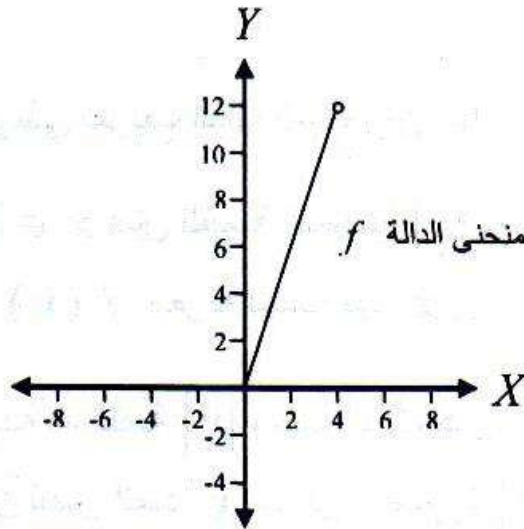
$$f(2) = 3(2) = 6$$

$$f(4) = 3(4) = 12$$

2. لدينا $f(x) = 3x$ لكل $x \in [0, 4)$ وكمجموعة أزواج فإن:

$$f = \{ (x, f(x)) \mid x \in [0, 4) \}$$

أي أن الصورة $f(x)$ تقابل الإحداثي الصادي Y لذا يمكن التعبير عن الصورة $f(x)$ بالصيغة $y = 3x$ ونعرف من دراستنا السابقة أن هذه معادلة خط مستقيم ميله 3 ويمر بنقطة الأصل ولكن الدالة f ممثله فقط بالجزء من المستقيم الواقع بين $x = 0$ و $x = 4$ لأن مجالها $[0, 4)$ كما هو موضح في الشكل:



إن الدائرة البيضاء الصغيرة في نهاية الخط الممثل للدالة تعني أن الدالة غير معرفة عند النقطة $x = 4$ لأنها لا تدخل في مجال تعريفها.