الحل:

1. $f'(x) = 4x^3 - 10x + 3$

$$f'(0) = 4(0)^3 - 10(0) + 3 = 0 - 0 + 3 = 3$$

$$f''(x) = 12x^2 - 10$$

$$f''(1) = 12(1)^2 - 10 = 12 - 10 = 2.$$

2. $f'(x) = 3(x-2)^2$

$$f''(x) = 6(x-2) = 6x - 12$$

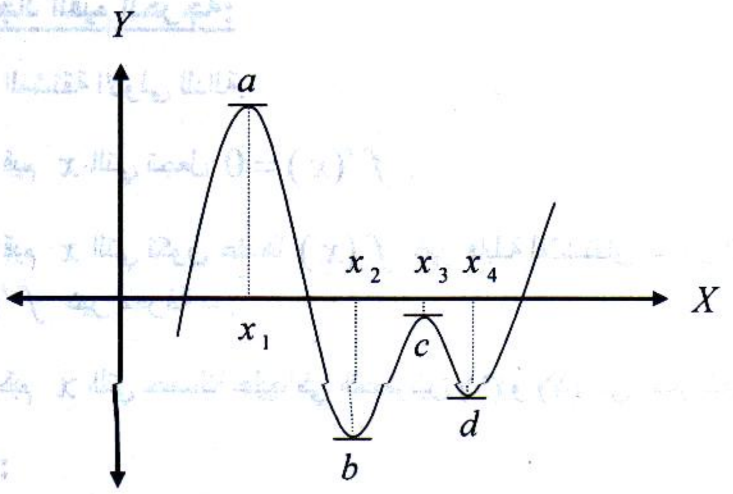
$$f''(-1) = 6(-1) - 12 = -6 - 12 = -18$$

$$f'''(x) = 6$$

$$f'''(3) = 6.$$

(7 – 7) القيم القصوى (العظمى والصغرى):

القيم القصوى المطلقة للدالة هي أعلى قيمة أو أدنى قيمة تأخذها الدالة خلال المجال الكلي للمتغير x . على أنه يجب أن نلاحظ أنه يوجد قيم قصوى محلية للدالة تكون أعلى أو أدنى من قيم الدالة المجاورة لها في فترة صغيرة حولها. وتسمى هذه القيم بالقيم العظمى المحلية والقيم الصغرى المحلية . والرسم التالي يوضح بعض القيم القصوى المحلية:



من الرسم يتبين أن القيم a و b و c و d تمثل القيم القصوى المحلية للدالة بالنسبة للقيم المجاورة لها. القيمتان a و c تمثل كل منهما أعلى قيمة للدالة بالنسبة للقيم المجاورة لها، وبالتالي كل منهما هي قيمة عظمى محلية على المنحنى. والقيمتان b و d تمثل كل منهما أدنى قيمة للدالة بالنسبة للقيم المجاورة لها, وبذلك تكونان قيم صغرى محلية على المنحنى. ولذلك نقول أن منحنى هذه الدالة له قيمة عظمى محلية عند كل من x_1 و x_3 , وله قيمة صغرى محلية عند كل من x_2 و x_4 . وتسمى القيم x_1 و x_2 و x_3 و x_4 بالقيم الحرجة . ويلاحظ الطالب في هذا المثال أن القيمة b هي قيمة قصوى محلية ومطلقة في نفس الوقت.

ولإيجاد القيم القصوى المحلية لأي دالة ينبغي أولاً إيجاد القيم الحرجة لها النظرية المهمة التالية تخدمنا كثيرا في هذا الصدد:

نظرية:

إذا كانت $f(x)$ دالة قابلة للإشتقاق على فترة معينة وكانت x_0 قيمة حرجة داخل هذه الفترة فإن $f'(x_0)=0$ أي أن قيمة المشتقة عند القيمة الحرجة تساوي الصفر.

خطوات إيجاد القيم الحرجة:

(1) نوجد المشتقة الأولى للدالة.

(2) نوجد قيم x التي تجعل $f'(x) = 0$.

(3) نوجد قيم x التي تكون عندها $f(x)$ غير قابلة للاشتقاق – أي التي عندها $f'(x)$ غير معرفة – .

(4) تكون قيم x التي حصلنا عليها في الخطوتين (3) و (4) هي القيم الحرجة .

مثال (22):

أوجد القيم الحرجة للدوال التالية:

1. $f(x) = x^2 + 8x + 2$.
2. $f(x) = x^3 - 12x - 1$.

الحل:

1. ايجاد المشتقة الأولى:

$$f'(x) = 2x + 8 .$$

نساوي المشتقة بالصفر ونحل المعادلة:

$$2x + 8 = 0 \quad \text{فإن} \quad x = -4$$

القيمة الحرجة هي $x = -4$.

2. ايجاد المشتقة الأولى:

$$f'(x) = 3x^2 - 12 .$$

نساوي المشتقة بالصفر ونحل المعادلة:

$$3x^2 - 12 = 0 \quad \text{فإن} \quad x = -2 \,,\, x = 2$$

القيم الحرجة هي $x = -2 \,,\, x = 2$.

في الأمثلة السابقة نجد القيم الحرجة للدوال ولكن دون أن نميز أي من القيم الحرجة تقابل قيمة عظمى محلية للدالة وأيها تقابل قيمة صغرى محلية , والمشتقة الثانية تخدمنا كثيرا بهذا الخصوص .

<u>اختبار المشتقة الثانية:</u>

إذا كانت $x = c$ قيمة حرجة للدالة $f(x)$ أي أن $f'(c) = 0$ فإن:

1. **للدالة $f(x)$ قيمة عظمى محلية عند $x = c$ إذا كانت $f''(c) < 0$.**
2. **للدالة $f(x)$ قيمة صغرى محلية عند $x = c$ إذا كانت $f''(c) > 0$.**

أي أن إذا كانت قيمة المشتقة الثانية بعد تعويض القيمة الحرجة $x = c$ سالبة فعند هذه القيمة الحرجة يكون للدالة قيمة عظمى محلية, أما إذا كانت قيمة المشتقة الثانية موجبة فعند هذه القيمة الحرجة قيمة صغرى محلية. ولإيجاد هذه القيمة العظمى أو الصغرى المحلية نعوض القيمة الحرجة c في الدالة أي نجد قيمة $f(c)$.

مثال (23):

أوجد القيمة العظمى والصغرى المحلية للدوال التالية:

1. $f(x) = x^3 - 3x^2 + 5$.
2. $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 12x + 15$.

الحل:

1. نوجد أولاً القيم الحرجة:

$$f'(x) = 3x^2 - 6x = 0$$

والقيم الحرجة هي $x = 2$, $x = 0$. ثم نوجد القيمة العظمى والقيمة الصغرى المحلية:

$$f''(x) = 6x - 6 \ .$$

- عند $x = 0$

$$f''(0) = 6(0) - 6 = -6 < 0$$

بما أن إشارة قيمة المشتقة الثانية عند $x = 0$ سالبة فإن للدالة قيمة عظمى محلية عند $x = 0$ والقيمة العظمى المحلية هي $f(0)$ أي أن:

$$f(0) = (0)^3 - 3(0)^2 + 5 = 5 \ .$$

هي قيمة عظمى محلية عند $x = 0$ للدالة $f(x)$.

- عند $x = 2$

$$f''(2) = 6(2) - 6 = 6 > 0 \ .$$

بما أن إشارة قيمة المشتقة الثانية عند $x = 2$ موجبة فإن للدالة قيمة صغرى محلية عند $x = 2$ والقيمة الصغرى المحلية هي $f(2)$ أي أن:

$$f(2) = (2)^3 - 3(2)^2 + 5 = 8 - 12 + 5 = 1$$

هي قيمة صغرى محلية عند $x = 2$ للدالة $f(x)$.

2. أولاً نوجد القيم الحرجة :

$$f'(x) = 6x^2 + 6x - 12 = 0$$

والقيم الحرجة هي $x = 1$, $x = -2$. ثم نجد القيمة العظمى والقيمة الصغرى المحلية:

$$f''(x) = 12x + 6 .$$

- عند $x = -2$:

$$f''(-2) = 12(-2) + 6 = -24 + 6 = -18 < 0$$

بما أن إشارة قيمة المشتقة الثانية عند $x = -2$ سالبة فإن للدالة قيمة عظمى محلية عند $x = -2$ والقيمة العظمى المحلية هي $f(-2)$ أي أن:

$$f(-2) = 2(-2)^3 + 3(-2)^2 - 12(-2) + 15 = 35$$

هي قيمة عظمى محلية عند $x = -2$ للدالة $f(x)$.

- عند $x = 1$:

$$f''(1) = 12(1) + 6 = 12 + 6 = 18 > 0$$

بما أن قيمة المشتقة الثانية عند $x = 1$ موجبة فإن للدالة قيمة صغرى محلية عند $x = 1$ والقيمة الصغرى المحلية هي $f(1)$ أي ان:

$$f(1) = 2(1)^3 + 3(1)^2 - 12(1) + 15 = 8$$

هي قيمة صغرى محلية عند $x = 1$ للدالة $f(x)$.