$$\lim_{x\to 2^+}(2x+3)=\lim_{x\to 2^-}(2x+3)=7\ .$$

وبما أن النهاية للدالة $2x + 3$ من اليمين تساوي النهاية من اليسار فإن:

$$\lim_{x\to 2}\ (2x+3)\ =7\ .$$

<u>خصائص النهايات:</u>

إذا كانت $f\ (x\ )$ و $g(x\ )$ دالتين في x وكان $c,a\in\mathbb{R}$ فإن:

1. $\lim\limits_{x\to a} c=c$ **. أي أن نهاية الدالة الثابتة هي القيمة الثابتة للدالة**
2. $\lim\limits_{x\to a} x^{n}=a^{n}$.
3. $\lim\limits_{x\to a} cf\ (x\ )=c\ \lim\limits_{x\to a}f\ (x\ )$.
4. $\lim\limits_{x\to a}\ [f\ (x\ )\pm g(x\ )]=\lim\limits_{x\to a}\ f\ (x\ )\pm\lim\limits_{x\to a}\ g(x\ )$.
5. $\lim\limits_{x\to a}[f\ (x\ ).g(x\ )]=\left[\lim\limits_{x\to a}f\ (x\ )\right].\left[\lim\limits_{x\to a}\ g(x\ )\right]$.
6. $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f\ (x\ )}{g(x\ )}=\dfrac{\lim\limits_{x\to a}f\ (x\ )}{\lim\limits_{x\to a}\ g(x\ )}\quad ,\quad \lim\limits_{x\to a}g(x\ )\neq 0$.
7. $\lim\limits_{x\to a}\ [f\ (x\ )]^{n}=\left[\lim\limits_{x\to a}f\ (x\ )\right]^{n}$.

ومن هذه الخصائص يمكن إثبات أنه إذا كانت $f\ (x\ )$ دالة كثيرة الحدود وكان a عدد حقيقي فإن:

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a) .$$

مثال (2):

إذا كانت:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - x & x \le 3 \\ 2x - 3 & x > 3 \end{cases}$$

فأوجد ما يلي:

1. $\lim_{x \to 3^+} f(x)$.
2. $\lim_{x \to 3^-} f(x)$.
3. $\lim_{x \to 3} f(x)$.

الحل:

1. $\lim_{x \to 3^+} f(x) = \lim_{x \to 3^+} 2x - 3 = 2(3) - 3 = 3$.
2. $\lim_{x \to 3^-} f(x) = \lim_{x \to 3^-} x^2 - x = 3^2 - 3 = 6$.
3. $\lim_{x \to 3} f(x)$ النهاية غير موجودة

لأن $\lim_{x \to 3^+} f(x) \neq \lim_{x \to 3^-} f(x)$.

مثال (3):

أوجد قيمة مايلي:

1. $\lim_{x \to 2} 5$.
2. $\lim_{x \to 3} x^2$.

3. $\lim\limits_{x \to -2} -3x^3$.

4. $\lim\limits_{x \to -1} \left(2x^2 + 5x - 4\right)$.

5. $\lim\limits_{x \to 4} \frac{2x - 8}{x + 2}$.

6. $\lim\limits_{x \to 1} \left(\frac{x^2 + 1}{2 - x}\right)^5$.

الحل:

1. $\lim\limits_{x \to 2} 5 = 5$.

2. $\lim\limits_{x \to 3} x^2 = 3^2 = 9$.

3. $\lim\limits_{x \to -2} -3x^3 = -3(-2)^3 = -3(-8) = 24$.

4. $\lim\limits_{x \to -1} \left(2x^2 + 5x - 4\right) = 2(-1)^2 + 5(-1) - 4 = -7$.

5. $\lim\limits_{x \to 4} \frac{2x - 8}{x + 2} = \frac{\lim\limits_{x \to 4} 2x + 8}{\lim\limits_{x \to 4} x + 2} = \frac{2(4) - 8}{4 + 2} = \frac{0}{6} = 0$.

6. $\lim\limits_{x \to 1} \left(\frac{x^2 + 1}{2 - x}\right)^5 = \left(\lim\limits_{x \to 1} \frac{x^2 + 1}{2 - x}\right)^5 = \left(\frac{\lim\limits_{x \to 1} x^2 + 1}{\lim\limits_{x \to 1} 2 - x}\right)^5$

$$= \left(\frac{(1)^2 + 1}{2 - 1}\right)^5 = (2)^5 = 32 .$$

في حالة حساب النهايات للدوال النسبية فإننا في كثير من الأحيان عند أخذ نهاية البسط ونهاية المقام نحصل على الكمية غير المحددة $\frac{0}{0}$ ولتلافي ذلك ينبغي أولاً تحليل كل من البسط والمقام ومن ثم اختصار العوامل المشتركة وأخيراً نقسم نهاية البسط الجديد على نهاية المقام الجديد كما في المثال التالي:

مثال (4):

أوجد قيمة كلٍ مما يلي:

1. $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{x^2 - 3x}{x - 3}$.

2. $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^2 - 5x + 4}{x - 1}$.

3. $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{x + 1}{x^3 + 1}$.

4. $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^2 - 4}{3x - 6}$.

الحل:

1.

نلاحظ أولاً بأخذ النهاية مباشرة أن:

$$\lim_{x \to 3} \frac{x^2 - 3x}{x - 3} = \frac{\lim\limits_{x \to 3} x^2 - 3x}{\lim\limits_{x \to 3} x - 3} \longrightarrow \frac{0}{0} .$$

وهذه نهاية غير محددة ولإيجادها بالضبط نتبع ما يلي:

$$\lim_{x \to 3} \frac{x^2 - 3x}{x - 3} = \lim_{x \to 3} \frac{x \cancel{(x - 3)}}{\cancel{x - 3}} = \lim_{x \to 3} x = 3 .$$

$$2.\ \lim_{x\to 1}\frac{x^2-5x+4}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{(x-4)\cancel{(x-1)}}{\cancel{x-1}}$$

$$=\lim_{x\to 1}x-4=1-4=-3\ .$$

$$3.\ \lim_{x\to -1}\frac{x+1}{x^3+1}=\lim_{x\to -1}\frac{\cancel{x+1}}{\cancel{(x+1)}\left(x^2+x+1\right)}$$

$$=\lim_{x\to -1}\frac{1}{\left(x^2+x+1\right)}=\frac{1}{(-1)^2+(-1)+1}=1\ .$$

$$4.\ \lim_{x\to 2}\frac{x^2-4}{3x-6}=\lim_{x\to 2}\frac{\cancel{(x-2)}(x+2)}{3\cancel{(x-2)}}=\lim_{x\to 2}\frac{x+2}{3}=\frac{2+2}{3}=\frac{4}{3}$$

(7 – 2) اتصال الدالة:

إن موضوع اتصال الدوال هو أحد الموضوعات الهامة في دراسة التفاضل والتكامل حيث يعد المدخل الرئيسي لإيجاد مشتقات الدوال وتكاملاتها والتي سيتم شرحها لاحقاً. والان نقدم دراسة بسيطة لمفهوم اتصال الدالة.

نقصد بقولنا أن الدالة $f(x)$ متصلة على الفترة $[a,b]$ أن منحنى الدالة $f(x)$ متصل دون انقطاع خلال الفترة $[a,b]$ التي يتغير فيها x ، أو بمعنى اخر إذا أمكننا أن نرسم منحنى الدالة في هذه الفترة دون أن نرفع سن القلم عن الورقة التي نرسم عليها، أي يكون منحنى الدالة في هذه الحالة خالياً من الإنقطاعات أو القفزات. وهذا يعني أن $f(x_0)$ معرفه عند كل نقطة x_0 في الفترة $[a,b]$ وأن