1

Mathematical Logic الفصل الاول / المنطق الرياضي

* المجموعة set :- وهي من المفاهيم الغير قابلة للتعريف وهي مفهوم أساسي مثل مفردات اللغة كالصنف، أسرة، جمع أو ما الى ذلك من المفاهيم الرياضية.

* العنصر element :- كل شيء يذكر في المجموعة يسمى عنصر.

ملاحظة : سوف نرمز للمجموعات بالأحرف الإنكليزية الكبيرة مثلاً :- A, B, C الخ

سوف نرمز للعناصر بالأحرف الانكليزية الصغيرة مثلاً :- a, b, c الخ.

* طرق التعبير عن المجموعات :- هنالك طريقتان للتعبير عن المجموعات وهي :

① الطريقة الجدولية :- Tabulation method

وفي هذه الطريقة تكتب جميع عناصر المجموعة بين قوسين مفروضين تفصل بينها الفوارز ، مثلاً $\{0, 1, 2, \ldots, 10\}$.

② طريقة القاعدة Rule method

وفي هذه الطريقة تذكر الصفة المميزة التي تمتلكها عناصر المجموعة والتي تفترق بها عن سواها مثلاً

$\{x$ عدد زوجي $: 1 \leq x \leq 7\}$

بشرط

الانتماء :- أن علاقة العنصر بالمجموعة هي علاقة انتماء فإذا كان a هو عنصر في المجموعة A فنقول أن a ينتمي الى المجموعة A وتكتب $a \in A$ وبخلاف ذلك تكتب $a \notin A$.

مثلاً : $A = \{x :$ x يقبل القسمة على 3 $\}$ فان $2 \notin A$ لكن $6 \in A$.

* المجموعة الخالية empty set :- وهي المجموعة التي لا تحتوي على أي عنصر ويرمز لها بالرمز $\emptyset$ أو { }.

أمثلة :-

$$\emptyset = \{x : x \neq x\}$$

ومعناها مجموعة كل العناصر التي لا تساوي نفسها ! وهذا محال.

$$\emptyset = \{x : 0 < x < 1 \text{ ، عدد صحيح } x\}$$

* المجموعة الجزئية :- لتكن A و B مجموعتان يقال بأن المجموعة B مجموعة جزئية (subset) من المجموعة A وتكتب $B \subseteq A$ إذا وفقط إذا كان كل عنصر ينتمي إلى B يكون عنصر ينتمي إلى A.

لاحظ أن $B \nsubseteq A$ تعني أن B ليست مجموعة جزئية من A.

* المجموعة الجزئية الفعلية :- proper sub set

يقال للمجموعة B بأنها مجموعة جزئية فعلية من المجموعة A وتكتب $\underset{\text{محتواة}}{B \subsetneq A}$ إذا تحقق الشرطان الآتيان :-

① $B \subseteq A$.

② يوجد على الأقل عنصر واحد في A لا ينتمي إلى B.

وبخلاف ذلك يقال بأن B ليست مجموعة جزئية فعلية من A وتكتب $B \not\subset A$.

مثال :- بين فيما إذا كانت المجاميع التالية مجاميع جزئية أو مجاميع جزئية فعلية ؟

① المجموعة الخالية $\emptyset$ من أي مجموعة : تمثل مجموعة جزئية فعلية.

② مجموعة الأعداد الطبيعية من مجموعة الأعداد الصحيحة : تمثل مجموعة جزئية فعلية.

لأن $-1 \in \mathbb{Z}$ لكن $-1 \notin \mathbb{N}$.

مثال :- $\{1,2,3\} \subseteq \{1,2,3\}$ بينما $\{1,2,3\} \not\subset \{1,2,3\}$

لأنه لا يوجد عنصر في المجموعة الثانية لا ينتمي إلى المجموعة الأولى .

(أي انه يوجد على الأقل شرط غير متحقق من شرطي المجموعة الجزئية الفعلية)

* المجموعة الشاملة : Universal set

إذا كانت جميع المجموعات التي ندرسها هي مجموعات جزئية من مجموعة ثابتة فأن هذه المجموعة الثابتة تسمى مجموعة شاملة ونرمز لها بالرمز U .

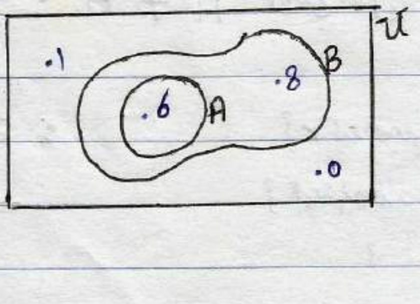
مثال / لنأخذ المجاميع الجزئية $A=\{1,3\}$, $B=\{0,2\}$, $C=\{4,5\}$

فأنه المجموعة الشاملة بالنسبة للمجاميع A , B , C ممكن أخذها .

$$U = \{0,1,2,3,4,5\} .$$

* مخططات فين Venn diagrams

في هذه المخططات تمثل المجموعة الشاملة على شكل مستطيل بينما تمثل كل منحني مغلق (غير متقاطع مع نفسه) داخل المستطيل المجموعة الجزئية من تلك المجموعة الشاملة كما أن العناصر تمثل على شكل نقاط (تقع) داخل المستطيل أو داخل المنحنيات .



*. المساواة Equality

إذا كان كل من a و b رمزاً لشيء معين فالعبارة $a = b$
تعني أن الرمزين يدلان على الشيء نفسه . وبخلاف ذلك يقال
بأن a لا يساوي b ويعبر عن ذلك بالعبارة $a \neq b$.

خواص المساواة :- تحقق المساواة الخواص الأساسية الأربع التالية.
ليكن كل من a, b, c رمزاً لشيء ما فإنه :

① $a = a$ أي أن كل شيء يساوي نفسه (الخاصية الانعكاسية)
② إذا كان $a = b$ فإنه $b = a$ (الخاصية التناظرية)
③ إذا كان $a = b$, $b = c$ فإن $a = c$ (الخاصية التعدية)
④ إذا كان $a = b$ فإن كل خاصية تحققها a يجب أن تحققها b
والعكس صحيح (خاصية التعويض) .

المساواة لمجموعتين :- ليكن كل من A و B مجموعتين يقال بأن المجموعة
A تساوي المجموعة B وتكتب $A = B$
إذا وفقط إذا كان $A \subseteq B$ و $B \subseteq A$.

ملاحظة : $A \neq B$ تعني أن A, B مجموعتان غير متساويتان -

أمثلة :
$\{2, -2\} = \{x : x^2 = 4 , \text{x عدد صحيح}\}$

$\{\text{مجموعة الأعداد الطبيعية}\} \neq \{\text{مجموعة الأعداد الصحيحة الموجبة}\}$

$\{0, 1, 2, \dots\} \qquad \{1, 2, 3, \dots\}$

بعض المجموعات الرياضية المهمة :-

① مجموعة الأعداد الطبيعية (Natural numbers) ويرمز لها بالرمز ($\mathbb{N}$)

وهي $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$

② مجموعة الأعداد الصحيحة (Integers numbers) ويرمز لها بالرمز ($\mathbb{Z}$)

وهي $\mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$

③ مجموعة الأعداد الصحيحة الموجبة (positive In. numbs) ويرمز لها ($\mathbb{Z}^+$)

وهي $\mathbb{Z}^+ = \{1, 2, 3, \dots\}$

④ مجموعة الأعداد الصحيحة السالبة (Negative In. numbrs) ويرمز لها ($\mathbb{Z}^-$)

وهي $\mathbb{Z}^- = \{-1, -2, -3, \dots\}$

⑤ مجموعة الأعداد الصحيحة الزوجية (Even integers numbers)

ويرمز لها بالرمز $\mathbb{Z}_e$ وهي

$\mathbb{Z}_e = \{X \mid X = 2n$ ، عدد صحيح $n\} = \{\dots, -4, -2, 0, 2, 4, \dots\}$

⑥ مجموعة الأعداد الصحيحة الفردية (Odd integers numbers)

ويرمز لها بالرمز $\mathbb{Z}_o$ وهي

$\mathbb{Z}_o = \{X \mid X = 2n+1$ ، عدد صحيح $n\} = \{\dots, -5, -3, -1, 1, 3, 5, \dots\}$.

⑦ مجموعة الأعداد الأولية (prime numbers) ويرمز لها بالرمز P

وهي $P = \{2, 3, 5, 7, 11, \dots\}$

كل عنصر في المجموعة P يسمى عددًا أوليًا .

* العدد الأولي: prime number

هو العدد الصحيح الذي له أربعة قواسم فقط هي { 1 ، -1 ، العدد نفسه ، سالب العدد نفسه } .

⑧ مجموعة الأعداد النسبية (Rational numbers) ويرمز لها $\mathbb{Q}$

وهي $\mathbb{Q} = \{ \frac{a}{b} : b \neq 0 \ , \ a, b \in \mathbb{Z} \}$

⑨ مجموعة الأعداد الحقيقية (Real numbers) ويرمز لها بالرمز $\mathbb{R}$ وهي $\mathbb{R} = \{ r : r \text{ عدد حقيقي} \}$

⑩ مجموعة الأعداد العقدية (Complex numbers) ويرمز لها بالرمز $\mathbb{C}$ وهي $\mathbb{C} = \{ z : z = x + iy \ , \ x, y \in \mathbb{R} \ , \ i = \sqrt{-1} \}$