النموذج الثنائي (المقابل) Dual Model

ان لكل نموذج البرمجة الخطية هناك نموذج مقابل (ثنائي بديل) ويسمى بالنموذج المقابل (الثنائي والبديل) ويتضمن النموذج الثنائي نفس البيانات التي يحتويها النموذج الاصلي (الاولي).

يطلق على صياغة مشكلة معينة وعلى حلها تسمية النموذج الاولي (primal model) الا إنه بالإمكان اعادة صياغة النموذج الاولي بشكل اخر يتمثل بصيغة رياضية يطلق عليها النموذج الثنائي (المقابل) (Dual model) . لاحظنا في البرمجة الخطية ان حل مشروع مشكلة ما بطريقة المبسطة ، وجد ان هنالك اسلوبا اخر يتم فيه التوصل الى نفس النتائج ويطلق عليه اسلوب الحل الثنائي (المقابل ،الازدواج) .

ان الفائدة المنتظرة من الحل الثنائي هي سهولة اجراء العمليات مقارنة بطريقة السمبلكس فإذا كانت لدينا ثلاث متغيرات اساسية مع وجود عشرة قيود للمشكلة فأن عدد القيود في الاسلوب الثنائي سيكون ثلاثة وهذا سيؤدي الى الاسراع في الحل وسنصل الى نفس النتيجة.

ويتميز النموذج المقابل بما يأتي :

1) يساعد النموذج المقابل الباحث على اختزال خطوات الحل في بعض الاحيان ومن ثم التوصل الى نتائج المشكلة بصورة اسرع بالقياس الى خطوات حل النموذج الاولي .
2) اذا كان لأحد متغيرات النموذج الاولي قيمة سالبة فأن حل النموذج هذا غير ممكن بينما في حالة النموذج المقابل يمكن ايجاد حل للمشكلة عند وجود متغير ذي قيمة سالبة .
3) بالإمكان اضافة قيود جديدة للمشكلة وايجاد الحل الامثل لها .

خطوات تحويل النموذج الاولي الى النموذج الثنائي (المقابل)

1) اذا كانت دالة الهدف في حالة تعظيم (Max) في النموذج الاولي تحول الى تصغير (Min) في النموذج الثنائي ، والعكس صحيح .
2) المعاملات التي تمثل جهة اليمين للقيود (bi) تصبح معاملات دالة الهدف(Ci) .
3) يتم عكس اشارة القيود من اكبر او يساوي (≥) الى اشارة اقل او يساوي (≤) , ومن اشارة اقل او يساوي (≤) الى اشارة اكبر او يساوي (≥) حسب الدالة.
4) معاملات العمود في النموذج الاولي تصبح معاملات الصف في النموذج الثنائي .

الصيغة العامة للنموذج الاولي هي :

$$\text{Max } Z = C_1 X_1 + C_2 X_2 + \ldots + C_n X_n$$

S.to

$$a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + \ldots + a_{1n} x_n \leq b_1$$

$$a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + \ldots + a_{2n} x_n \leq b_2$$

. . . . . .

. . . . . .

$$a_{m1} x_1 + a_{m2} x_2 + \ldots + a_{mn} x_n \leq b_m$$

$$(x_1; x_2; x_3; \ldots; x_n \geq 0)$$

عندها تكون الصيغة العامة للنموذج الثنائي (المقابل) كما يأتي:

$$\text{Min } T = b_1 y_1 + b_2 y_2 + \ldots + b_m y_m$$

S.to

$$a_{11} y_1 + a_{21} y_2 + \ldots + a_{m1} y_m \geq c_1$$

$$a_{12} y_1 + a_{22} y_2 + \ldots + a_{m2} y_m \geq c_2$$

. . . . . .

. . . . . .

$$a_{1n} y_1 + a_{2n} y_2 + \ldots + a_{mn} y_n \geq c_n$$

$$(y_1; y_2; y_3; \ldots; y_n \geq 0)$$

محاضرات بحوث عمليات لأعداد الدكتور مسعل حربي العمري

مثال / حول نموذج البرمجة الخطية الاتي الى النموذج الثنائي (المقابل) ؟

Primal الاولي

Max $Z = 5X_1 + 10X_2$

S.to

$3X_1 - 7X_2 \leq 20$

$-X_1 - X_2 \leq -2$

$4X_1 + 8X_2 \leq 30$

$-4X_1 - 8X_2 \leq -30$

$X_1, X_2 \geq 0$

Sol/

نفرض ان : $X=Y$, $Z=T$

Dual الثنائي (المقابل)

Min $T = 20Y_1 - 2Y_2 + 30Y_3 - 30Y_4$

S.to

$3Y_1 - Y_2 + 4Y_3 - 4Y_4 \geq 5$

$-7Y_1 - Y_2 + 8Y_3 - 8Y_4 \geq 10$

$Y_1, Y_2, Y_3, Y_4 \geq 0$

EX\ Change the following model to the Dual model?

Min $Z = 20X_1 + 15X_2 + 15X_3$

S.to

$8X_1 + 2X_2 + 8X_3 \geq 100$

$4X_1 + 4X_2 - 4X_3 \geq 60$

$X_1, X_2, X_3 \geq 0$

محاضرات بحوث عمليات أعداد الدكتور مشعل هزيل العازمي

Sol\

نفرض ان : $X=Y \quad Z=T$

$$\text{Max } T = 100Y_1 + 60Y_2$$

S.to

$$8Y_1 + 4Y_2 \leq 20$$

$$2Y_1 + 4Y_2 \leq 15$$

$$8Y_1 - 4Y_2 \leq 15$$

$$Y_1, Y_2 \geq 0$$

EX\ Find the Dual model?

$$\text{Max } Z = 4X_1 + X_2 - 2X_3$$

S.to

$$2X_1 - 6X_2 + 3X_3 \leq 7$$

$$X_1 + X_2 - 5X_3 \geq -25$$

$$X_1, X_2, X_3 \geq 0$$

Sol\ نفرض ان : $X=Y \ , \ Z=T$

$$\text{Max } Z = 4X_1 + X_2 - 2X_3$$

S.to

$$2X_1 - 6X_2 + 3X_3 \leq 7$$

$X_1 + X_2 - 5X_3 \geq -25 \quad *(-1)$ نضرب القيد في (-1) لتوحيد اشارة القيود

$$X_1, X_2, X_3 \geq 0$$

محاضرات بحوث عمليات أعداد الدكتور مسعل مرعي العامري

Min $T = 7Y_1 + 25Y_2$

S.to

$2Y_1 - Y_2 \geq 4$

$-6Y_1 - Y_2 \geq 1$

$3Y_1 + 5Y_2 \geq -2$

$Y_1, Y_2 \geq 0$

EX\ Solve by using Dual model ?

Min $Z = 2X_1 - X_2$

S.to

$X_1 + 3X_2 = 17$

$X_1 - X_2 = 3$

$X_1, X_2 \geq 0$

Sol\ نفرض ان: Z=T, X=Y

Min $Z = 2X_1 - X_2$

S.to

$X_1 + 3X_2 \geq 17$

$X_1 + 3X_2 \leq 17$ *(-1)

$X_1 - X_2 \geq 3$

$X_1 - X_2 \leq 3$ *(-1)

$X_1, X_2 \geq 0$

محاضرات بحوث عمليات أعداد الدكتور مشعل هزيل العامري

$$\text{Min } Z = 2X_1 - X_2$$

S.to

$$X_1 + 3X_2 \geq 17$$

$$-X_1 - 3X_2 \geq -17$$

$$X_1 - X_2 \geq 3$$

$$-X_1 + X_2 \geq -3$$

$$X_1, X_2 \geq 0$$

$$\text{Max } T = 17Y_1 - 17Y_2 + 3Y_3 - 3Y_4$$

S.to

$$Y_1 - Y_2 + Y_3 - Y_4 \leq 2$$

$$3Y_1 - 3Y_2 - Y_3 + Y_4 \leq -1$$

$$Y_1, Y_2, Y_3, Y_4 \geq 0$$

محاضرات بحوث عمليات أعداد الدكتور مشعل حربي العامري