العلاقة بين المتوسطات الثلاث (الوسط الحسابي ، الوسط الهندسي ،الوسط التوافقي) :

إذا كانت القيم موجبة لعينة معينة فأن[1] :

مربع الوسط الهندسي = الوسط الحسابي × الوسط التوافقي أي :

$$\overline{G}^2 = \overline{H}.\overline{X}$$

ولإثبات ذلك نأخذ المثال التالي :

مثال (23.2) :

افترض أن عينة مكونة من مشاهدتين هما (X_1, X_2) برهن أن $\overline{G}^2 = \overline{H}.\overline{X}$

الحل :

$$\overline{G} = \overline{H}.X$$

$$\overline{G} = \sqrt{X_1.X_2}$$

$$\overline{G}^2 = X_1.X_2 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

$$\overline{X} = \frac{\sum X_i}{n}$$

$$\overline{X} = \frac{X_1 + X_2}{2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

$$\overline{H} = \frac{n}{\sum \frac{1}{X_i}}$$

$$\overline{H} = \frac{2}{\frac{1}{X_1} + \frac{1}{X_2}} = \frac{2}{\frac{X_2 + X_1}{X_1.X_2}} = \frac{2X_1X_2}{X_1 + X_2}$$

$$\overline{H} = \frac{2X_1}{X_1 + X_2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

$$\overline{H}.\overline{X} = \frac{2X_1X_2}{X_1 + X_2} . \frac{X_1 + X_2}{2}$$

[1] - سليم إسماعيل ألغرابي ودعلي محمد صادق سيفي ،مبادئ الإحصاء ،مطبعة جامعة بغداد ،،1985،ص 100

$$\bar{H}.\bar{X} = X_1.X_2 \quad .... \quad (4)$$

وبمطابقة المعادلة(4) مع العادلة (1) نجد أن : $\bar{G}^2 = \bar{H}.\bar{X}$ وهو المطلوب

كما يمكن إثبات العلاقة أعلاه بالاعتماد على بيانات ونتائج الأمثلة : (2.2) ، (18.2) ، (20.2) ، والتي كانت كما يلي : $\bar{X} = 13 \qquad \bar{G} = 10.51 \qquad \bar{H} = 8.5$

حيث أن : $\bar{G}^2 = (10.51)^2 = 110.46 \approx 110.5$

وأن : $\bar{H}.\bar{X} = (8.5)(13) = 110.5$

وهذا ما يثبت العلاقة أعلاه بين المتوسطات الثلاث أي أن : $\bar{G}^2 = \bar{H}.\bar{X}$

وهو ما يؤكد أيضا العلاقة بين الأوساط الثلاث والمتمثلة بالاتي :

$$\bar{H} \le \bar{G} \le \bar{X}$$

أسئلة وتمارين الفصل الثاني

أسئلة غير محلولة :

س/1– أجب بكلمة صح أو خطأ عما يلي :

(1) قيمة الوسط الحسابي دائما اكبر من الوسط التوافقي وأقل من الوسط الهندسي

(2) يتأثر الوسط الهندسي بالقيم الشاذة أكثر من تأثر الوسط الحسابي بها .

(3) لا يمكن استخدام الوسط التوافقي عندما تكون البيانات وصفية .

(4) الوسط الحسابي لحاصل ضرب قيم متغيرين يساوي مجموع الوسطين الحسابيين للمتغيرين .

(5) يعتبر الوسط الهندسي من المقاييس المناسبة عند حساب الأرقام القياسية.

(6) لا يمكن حساب مقياس المنوال في حالة الجداول المفتوحة .

س/2 – برهن أنه عند إضافة عند عدد ثابت (k) الى كل قيمة من قيم مشاهدات العينة المدروسة فأن الوسط الحسابي للقيم الجديدة = الوسط الحسابي للقيم القديمة + العدد الثابت .

س/3 - برهن أن مجموع مربع الوسط الهندسي يساوي حاصل ضرب الوسط الحسابي في الوسط التوافقي أي إن : $\bar{G}^2 = \bar{H}.\bar{X}$ باستخدام عينة من مفردتين هما : (X_1 ، X_2) .

س/4 – الجدول التالي يمثل القروض الممنوحة من احد المصارف العراقية خلال الربع الأول من عام 2011 بملاين الدنانير :

مبالغ القروض الفئات C_i	عدد المقترضين التكرارات f_i
01 - 05	20
06 – 10	30
11 – 15	70
16 – 20	50
21 - 25	30
	200

المطلوب :1− حساب مقاييس التمركز (الوسط الحسابي ، الوسيط ، المنوال ، الوسط الهندسي ، الوسط التوافقي) .

2 – برهن أن مربع الوسط الهندسي = الوسط الحسابي × الوسط التوافقي.

تمارين محلولة :

– أعطيت إليك العينة التالية : $5, 3, X_3, 8, 9$

وكان الوسط الحسابي للعينة أعلاه (7) أوجد الوسط الهندسي .

الحل :

$$\bar{X} = \frac{\sum X_i}{n}$$

$$7 = \frac{5+3+X_3+8+9}{5}$$

$$35 = 25 + X_3$$

$$X_3 = 10$$

إذن العينة أصبحت : 9 ، 8 ، 10 ، 3 ، 5

1- لاستخراج الوسط الهندسي نطبق القانون التالي : $Log\bar{G} = \frac{\sum LogX_i}{n}$

$$Log\bar{G} = \frac{\sum Log5 + Log3 + Log10 + Log8 + Log9}{5} = \frac{4.03}{5} = 0.806$$

وبأخذ العدد القابل للوغاريتم :

$$\bar{G} = 6.4$$

س/3 يعمل في إحدى الشركات التجارية 200 موظف خدمة معدل رواتبهم الشهرية

400 دولار . المطلوب :
(1) ما هو مجموع الرواتب التي تدفعها الشركة شهريا .
(2) نتيجة الأزمة المالية قامت الشركة بتخفيض الرواتب وذلك بخصم مبلغ 50 دولار من كل موظف فما هو معدل الرواتب الشهرية بعد الخصم ، وما هو مجموع الرواتب التي ستدفعها الشركة بعد الخصم أيضا .

الحل :

مجموع الرواتب = معدل الراتب الشهري × عدد الموظفين .

= $400 \times 200 = 80000$ دينار

2 – معدل الرواتب بعد التخفيض = معدل الرواتب القديم – المبلغ المخفض

معدل الرواتب الجديد = 400 - 50 = 350 دينار

3 – مجموع الرواتب الجديد = $350 \times 200 = 70000$ دينار

س/3 عينة مكونة من مفردتين فقط هما $(X_1,3)$ أثبت باستخدام تلك العينة أن مربع الوسط الهندسي = حاصل ضرب الوسط الحسابي × الوسط التوافقي أي :

$$\overline{G}^2 = \overline{H}.\overline{X}$$

الحل :

$$\overline{G} = \overline{H}.\overline{X}$$

$$\overline{G} = \sqrt{(3)(X_1)}$$

$$\overline{G}^2 = 3X_1 \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ (1)$$

$$\overline{X} = \frac{\sum X_i}{n}$$

$$\overline{X} = \frac{3+X_1}{2} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ (2)$$

$$\overline{H} = \frac{n}{\sum \frac{1}{X_i}}$$

$$\overline{H} = \frac{2}{\frac{1}{3}+\frac{1}{X_1}} = \frac{2}{\frac{X_1+3}{3X_1}} = \frac{6X_1}{X_1+3}$$

$$\overline{H} = \frac{6X_1}{X_1+3} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ (3)$$

$$\overline{H}.\overline{X} = \frac{6X_1}{X_1+3}.\frac{3+X_1}{2}$$

$$\overline{H}.\overline{X} = 3X_1 \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ (4)$$

وبمطابقة المعادلة(4) مع العادلة (1) نجد أن : $\overline{G}^2 = \overline{H}.\overline{X}$ وهو المطلوب

س/4 : في توزيع متماثل كان فيه : $\sum_{i=1}^{60} X_i = 3600$ وقيمة الوسيط 59.5 أوجد قيمة المنوال .

الحل :

$$\overline{X} = \frac{3600}{60} = 60$$

$$\overline{X} - Me = \frac{\overline{X} - Mo}{3}$$

$$60 - 59.5 = \frac{60 - Mo}{3}$$

$$Mo = 58.5$$

س /5 من الجدول التالي أوجد :

(أ) ـ الوسيط .(ب)- المنوال

الفئات	التكرار
05 – 07	6
08 -10	10
11 -13	5
14 -16	2
17 - 19	1
	24

الحل :

(1) لاستخراج الوسيط :

الفئات	التكرار	ت . ت ص
05 – 07	6	6
08 – 10	10	16
11 – 13	5	21
14 – 16	2	23
17 – 19	1	24
	24	

نستخرج ترتيب الوسيط : $AMe=\frac{\sum f_i}{2}=\frac{24}{2}=12$

فئة الوسيط (08 – 10) والحد الأدنى الحقيقي للفئة هو 7.5

$$Me=L_1+\left(\frac{\frac{f_i}{2}-F^*}{f_m}\right).w$$

$$Me=7.5+\left(\frac{\frac{24}{2}-6}{10}\right).3=9.3$$

(2) نستخرج المنوال :

فئة المنوال هي (08 – 10) والحد الأدنى الحقيقي للفئة هو 7.5

$$Mo=L_1+\left(\frac{d_1}{d_1+d_2}\right).w$$

$$Mo=7.5+\left(\frac{4}{4+5}\right).3=8.8$$

س/5 : من العينة التالية : 1 ، 4 ، 2 ، 6 ، 3

1– أوجد : الوسط الهندسي ، الوسط التوافقي .

2 – برهن من خلال تلك العينة أن : $\bar{H}\le\bar{G}\le\bar{X}$.

– الوسط التوافقي :

$$\bar{H}=\frac{n}{\sum\frac{1}{X_i}}$$

$$\bar{H}=\frac{5}{\frac{1}{3}+\frac{1}{6}+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{1}}=\frac{5}{\frac{27}{12}}=\frac{60}{27}=2.222$$

- الوسط الهندسي : :

$$Log\overline{G}=\frac{\sum LogX_i}{n}$$

$$Log\overline{G}=\frac{\sum Log3+Log6+Log2+Log4+Log1}{5}=\frac{2.155}{5}=0.431$$

$\overline{G}=2..70$

– لإثبات العلاقة نستخرج الوسط الحسابي :

$$\bar{X} = \frac{\sum X_i}{n} = \frac{16}{5} = 3.2$$

وأن النتائج أعلاه في الفقرتين 1 ،2 تبرهن أن $\bar{H} \le \bar{G} \le \bar{X}$ إذ أن قيمة الوسط الهندسي البالغة 2.70هي أصغر من الوسط الحسابي وأكبر من الوسط التوافقي .

س/6 : الجدول التالي يمثل المعاملات المنجزة في احد المصارف التجارية في بغداد خلال شهر نيسان 2011 :

عدد المعاملات الفئات C_i	عدد أيام الشهر التكرارات f_i
06 – 10	3
11 – 15	6
16 – 20	8
21 – 25	4
26 – 30	7
31 – 35	2
	30

المطلوب :

1– إثبات العلاقة بين الأوساط (الحسابي والهندسي والتوافقي) والمتمثلة بالصيغة التالية :

$\bar{G}^2 = \bar{H}.\bar{X}$.

1 – برهنة أن : $\bar{H} \le \bar{G} \le \bar{X}$.

الحل : لغرض إثبات العلاقتين أعلاه نستخرج أولا قيم الأوساط الثلاث وكما يلي :

أ - نستخرج الوسط الحسابي الصيغة بتطبيق الصيغة التالية :

$$\bar{X} = \frac{\sum f_i X_i}{\sum f_i}$$

عدد المعاملات الفئات C_i	عدد أيام الشهر التكرارات f_i	مراكز الفئات X_i	$f_i X_i$
06 – 10	3	8	24
11 – 15	6	13	78
16 – 20	8	18	144
21 – 25	4	23	92
26 – 30	7	28	196
31 – 35	2	33	66
	30		600

$$\overline{X} = \frac{600}{30}$$

ب - نستخرج قيمة الوسط الهندسي بتطبيق الصيغة التالية :

$$Log\overline{G} = \frac{\sum_{i=1}^{n} f_i LogX_i}{\sum f_i}$$

عدد المعاملات الفئات C_i	عدد أيام الشهر التكرارات f_i	مراكز الفئات X_i	$LogX_i$	$f_i LogX_i$
06 – 10	3	8	0.90	2.7
11 – 15	6	13	1.113	6.66
16 – 20	8	18	1.255	10.04
21 – 25	4	23	1.361	5.444
26 – 30	7	28	1.447	10.129
31 – 35	2	33	1.518	3.036
	30			38

$$Log\overline{G} = \frac{38}{30} = 1.266$$

ومن جدول الأرقام المقابلة :

$$\overline{G} = 18.45$$

ج – نستخرج الوسط التوافقي بتطبيق الصيغة التالية : $\bar{H} = \dfrac{\sum f_i}{\sum\left(\dfrac{f_i}{X_i}\right)}$

عدد المعاملات الفئات C_i	عدد أيام الشهر التكرارات f_i	مراكز الفئات X_i	$\frac{f_i}{X_i}$
06 – 10	3	8	0.375
11 – 15	6	13	0.461
16 – 20	8	18	0.444
21 – 25	4	23	0.173
26 – 30	7	28	0.25
31 – 35	2	33	0.06
	30		1.763

$$\bar{H} = \frac{30}{1.763} = 17.016$$

ولغرض إثبات العلاقة بين الأوساط الثلاث وفق الصيغة : $\overline{G}^2 = \overline{H}.\overline{X}$ نجد أن :

$$\overline{G}^2 = (18.45)^2 = 340.4$$

وأن :

$$\overline{H}.\overline{X} = (20).(17.016) = 340.32$$

وهذا يحقق الى حد بعيد العلاقة أعلاه بين الأوساط الثلاث وفق الصيغة المذكورة .
كما أن قيم الأوساط الثلاث تبرهن أيضا أن : $\overline{X} \leq \overline{G} \leq \overline{H}$.